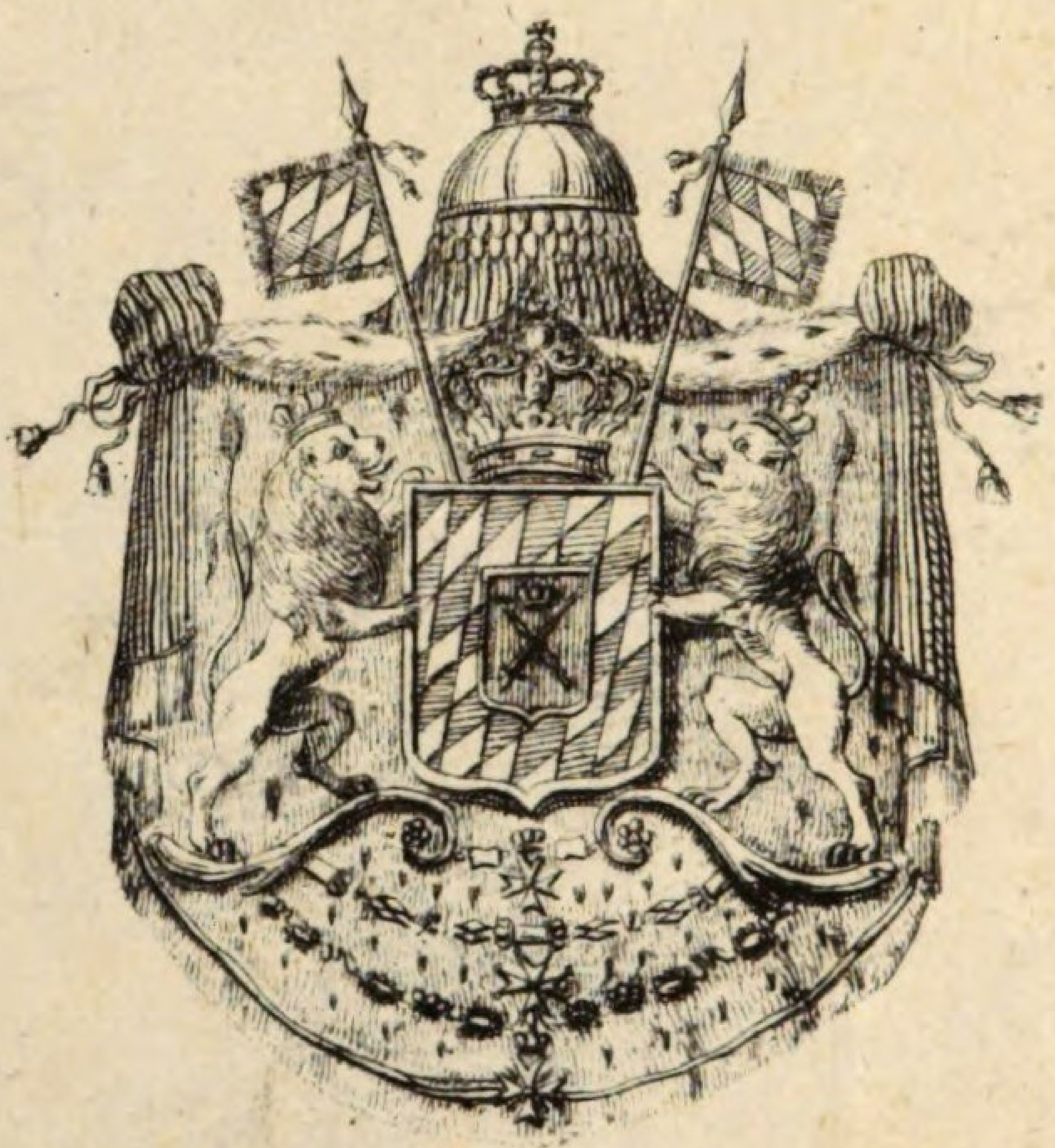
Math. P. 756m

Friederich (J. B)



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

die lateinischen Schulen in Bayern

von

Dr. Johann Bernhard Friederich,

Professor der Mathematik an dem königlichen Gymnasium in Ansbach.

Nürnberg,

Druck und Verlag von Friedrich Campe.

1831.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

„Die lateinische Schule hat den Hauptzweck, für das Gymnasium vorzubereiten; nach diesem Hauptzwecke richtet sich Stoff, Umfang und Art des Unterrichts." *)

Die Behandlung des arithmetischen Unterrichts in den beiden unteren Kursen der lateinischen Schule kann sich von der in den unteren Abtheilungen der Bürgerschulen nicht unterscheiden. Das Kopfrechnen soll vorzüglich betrieben und als eines der wirksamsten Bildungsmittel des Verstandes benützt werden. Das Zifferrechnen muß durch vielfältige Uebungen zu einer genügenden Fertigkeit und Sicherheit in den Rechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen gebracht werden, soll aber dem Kopfrechnen immer um einen Schritt nachgehen. Die Schüler dieser Kurse stehen noch auf einer zu niedrigen Stufe der Bildung, als daß sie allgemeine arithmetische Lehren fassen könnten. Eine wissen-

*) S. Ordnung der lateinischen Schulen und der Gymnasien in Bayern 1830. §. 2.

schaftliche Behandlung des Gegenstandes wäre ganz zwecklos.

Der arithmetische Unterricht in den beiden oberen Kursen der lateinischen Schule weicht von dem in den oberen Abtheilungen der Bürgerschule darin ab, daß man hier vorzugsweise das Bedürfniß künftiger Geschäftsleute berücksichtigt, dort eine Vorbereitung für einen höhern Unterricht zunächst im Auge hat. So wie aber die Bürgerschule ihren Zweck nur dann erreichen kann, wenn der Unterricht gründlich ertheilt wird, so darf die lateinische Schule die Anwendbarkeit der arithmetischen Lehren auf Verhältnisse des bürgerlichen Lebens nicht unbeachtet lassen, wenn nicht der Schüler unbeholfen bleiben soll. Der Schüler der oberen Kurse muß sich also an die mancherlei Zahlenverbindungen gewöhnen und durch stufenweise gesteigerte Uebungen zum klaren Auffassen der verschiedenen Regeln und ihrer Anwendung geführt werden. Die Kräfte erstarken nur allmählich, und der Blick muß vielfältig und lange geübt werden, bis er eine Lehre in einigem Zusammenhange zu überschauen vermag. Es wäre daher durchaus nicht naturgemäß, den Schülern der oberen Kurse der lateinischen Schule abstrakte Arithmetik vorzutragen und auf vollkommene Bestimmtheit der Begriffe zu dringen. Der Unter-

richt soll sich der wissenschaftlichen Form blos annähern. Nothwendig ist es aber, daß der Schüler bei dem arithmetischen Unterrichte an folgerechtes Denken und besonnenes Arbeiten gewöhnt, daß das Urtheilsvermögen geübt, der Scharfsinn angeregt und auf richtiges Aussprechen des Gedachten gedrungen werde. Durch Sicherheit im Unterrichte, durch Lebendigkeit des Vortrags suche der Lehrer den jungen Geist des Schülers an sich zu ziehen und in ihm ein freudiges Streben nach immer vollständigerer Einsicht zu erwecken.

Das Lehrbuch der Arithmetik, welches ich hiemit dem Publikum übergebe, enthält so viel als für die beiden oberen Kurse der lateinischen Schule gehört. Es soll dem Lehrer als Leitfaden bei seinem Unterrichte, und dem Schüler als Führer bei der Wiederholung des in der Schule Gelernten dienen. So wenig nämlich der Schüler auf eine Lektion sich vorbereiten kann, so unerläßlich ist die Wiederholung. Jeder Schüler muß daher mit einem Lehrbuche versehen seyn. Die nothwendigsten Sätze und Lehren zu diktiren, ist nicht anzurathen: man verderbt dadurch einen großen Theil der ohnehin zu sparsam zugemessenen Zeit, und, was noch schlimmer ist, der Unterricht verliert seinen Reiz.

Die am Ende des Buchs befindlichen Tabellen,

welche mit den Maaß-, Gewichts- und Münzverhältnissen verschiedener Länder bekannt machen, werden dem Lehrer Gelegenheit geben, die Zahl der im Buche selbst enthaltenen Aufgaben nach dem Bedürfnisse der Schüler zu vermehren.

Erfahrene Schulmänner bitte ich, meine Arbeit zu prüfen, die Mängel derselben mit Nachsicht zu beurtheilen und mich ihrer Belehrung zu würdigen.

Ansbach, im Januar 1831.

Dr. Friederich.

Inhalt.

	Seite.
Einleitung	1.
Erster Abschnitt. Von der Arithmetik überhaupt	10.
Zweiter Abschnitt. Von den Rechnungsarten mit unbenannten ganzen Zahlen	22.
A. Addition	22.
B. Subtraktion	32.
C. Multiplikation	38.
D. Division	54.
Dritter Abschnitt. Von der Theilbarkeit der Zahlen	78.
Vierter Abschnitt. Von den unbenannten gebrochenen Zahlen oder den Brüchen	88.
I. Von den Brüchen überhaupt	88.
II. Von den Rechnungsarten mit Brüchen	106.
A. Addition	106.
B. Subtraktion	108.
C. Multiplikation	111.
D. Division	114.
Fünfter Abschnitt. Von den Dezimalbrüchen	118.
Sechster Abschnitt. Von den benannten Zahlen	143.
Siebenter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen	160.
A. Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt	160.
B. Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen	165.
C. Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen	169.

Achter Abschnitt. Von der Anwendung der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen auf verschiedene Fälle des bürgerlichen Lebens.................. 184.
A. Einfache Verhältnisse.................. 186.
B. Zusammengesetzte Verhältnisse.............. 195.
C. Kettenregel.......................... 204.
D. Gesellschaftsrechnung.................. 212.
Tabellen.................................. 218.

Einleitung.

§. 1.

Wer wissen will, was er unter fünf Meilen zu verstehen habe, muß zuerst erfahren, was eine Meile ist; wer einen Begriff von drei Thalern haben will, muß zuerst einen Begriff von einem Thaler haben: wer überhaupt ein Ding nach seiner Mehrheit kennen lernen will, muß dieses Ding zuerst nach seiner Einheit kennen lernen.

Unter der Einheit eines Dinges versteht man überhaupt das, wonach es Eins ist und als ein für sich Bestehendes betrachtet werden kann. Die Einheit von sechs Thalern ist ein Thaler; die Einheit von fünf Kreuzern ist ein Kreuzer; die Einheit von zwölf ist Eins.

§. 2.

Jedes Ding, das — sey es in der That oder bloß in unserer Vorstellung — einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, heißt eine Größe. So sind z. B. Linien, Flächen, Körper, Gewichte, Geschwindigkeiten der Bewegungen u. s. w. Größen, weil bei allen diesen Dingen eine Vermehrung oder Verminderung denkbar ist.

§. 3.

Diejenige Wissenschaft, welche die Gesetze lehrt, nach welchen Größen, die auf irgend eine Weise unter sich in Verbindung stehen, mit einander verglichen und aus einander abgeleitet werden können, heißt **Mathematik**.

(τὸ μάθημα, die Wissenschaft; τὰ μαθήματα vorzugsweise die Theile derjenigen Wissenschaft, welche von den Größen handelt; ἡ μαθηματικὴ [sc. ἐπιςτήμη] die Wissenschaft von den Größen.)

§. 4.

Größen, welche aus Einheiten der nämlichen Art entstanden sind oder sich überhaupt auf die nämliche Einheit beziehen, heißen **gleichartig**; Größen aber, die aus Einheiten verschiedener Art entstanden sind oder sich auf verschiedene Einheiten beziehen, heißen **ungleichartig**. Zwei Meilen und sechs Meilen sind gleichartige Größen, weil beide die nämliche Einheit (Meile) haben; drei Pfunde aber und fünf Gulden sind ungleichartige Größen, weil sie sich auf Einheiten verschiedener Art beziehen.

Zwei Größen können in einer Beziehung ungleichartig, in einer andern gleichartig seyn. So sind z. B. drei Kronthaler und drei Sächsische Thaler als solche ungleichartig, weil sie sich auf Einheiten verschiedener Art beziehen; betrachtet man aber die Kronthaler und Sächsischen Thaler überhaupt als Thaler, so sind sie gleichartig, weil sie sich nun auf die nämliche Einheit, nämlich auf Thaler, beziehen.

§. 5.

a. Läßt sich eine Größe als eine Menge oder Vielheit einzelner abgesonderter und bestimmter Theile betrachten, die unter sich jede beliebige Verbindung und Ordnung haben können und wovon jeder einzelne Theil selbst wieder ein Ganzes vorstellt, so nennt man diese Größe eine zählbare oder diskrete.

Liegen z. B. mehrere Kreuzer auf- und nebeneinander, so bilden sie eine zählbare, diskrete Größe. Alle diese Kreuzer können, dem Werthe des Ganzen unbeschadet, in jeder beliebigen Ordnung auf- und nebeneinander liegen, und jeder Kreuzer, obgleich ein Theil des Ganzen, nämlich einer gewissen Menge von Kreuzern, stellt doch für sich betrachtet ein Ganzes dar.

b. Eine Größe, deren Theile willkührlich angenommen werden können und so zusammenhängen und verbunden sind, daß das Aufhören d. h. die Gränze des einen Theils zugleich der Anfang eines andern Theils, und zugleich die Lage der einzelnen Theile genau bestimmt ist, heißt eine ausmeßbare oder stetige Größe. Die Lage der Theile einer stetigen Größe ist bestimmt und kann nicht abgeändert werden, wenn nicht die Größe selbst eine Abänderung erleiden soll. Die Anzahl der Theile, welche, wie bereits gesagt, beliebig angenommen werden können, ist vollkommen unbestimmt. Es läßt sich daher die Theilung einer stetigen Größe in das Unbestimmbare fortsetzen. Wenigstens ist eine solche Theilung in das Unbestimmbare denkbar.

Betrachtet man z. B. ein Quadrat *), so findet man, daß alle Theile desselben, welche willkührlich angenommen werden können, auf das Innigste unter einander verbunden sind, so daß man nicht beliebige Theile nehmen und in eine andere Lage bringen kann, ohne daß das Ganze, d. h. das Quadrat eine Aenderung erleidet. Auch erkennt man, daß die Theilung eines Quadrats bis in das Unbestimmbare denkbar ist. Das Quadrat ist also eine stetige Größe.

Ferner: Wenn mehrere Kugeln oder andere Dinge auf- und nebeneinander liegen, also im gegebenen Falle einen Kugelhaufen bilden, und es wird gefragt, aus wie viel Theilen d. h. Kugeln der Haufen besteht, so betrachtet man den letztern als eine diskrete, zählbare Größe, denn offenbar läßt sich die gestellte Frage nur dadurch beantworten, daß man die einzelnen Kugeln, als Theile des Ganzen, zusammenzählt.

Nimmt man nun aber eine Kugel, und soll ihr Durchmesser, ihre Oberfläche, ihr körperlicher Inhalt bestimmt werden, so läßt sich dieß, wie leicht einzusehen ist, durch Zählen nicht bewirken, sondern hier wird ein Messen in Anwendung zu bringen seyn; folglich ist die Kugel eine stetige oder ausmeßbare Größe.

§. 6.

Nach der allgemeinen Eintheilung der Größen in

---

*) Es kann vorausgesetzt werden, daß jeder Schüler im Allgemeinen eine Vorstellung vom Quadrate habe. Ist dieß jedoch der Fall nicht, so kann der Lehrer leicht nachhelfen.

diskrete und stetige (zählbare und ausmeßbare), zerfällt die Mathematik selbst in die beiden Haupttheile

A. Arithmetik,

B. Geometrie.

Diese beiden Theile der Mathematik zerfallen wieder in besondere Zweige.

(ἡ τέχνη ἀριθμητικὴ [ἄριθμος, Zahl] die Wissenschaft von den zählbaren Größen.)

ἡ γεωμετρία [γῆ Land, Feld und μετρέω ich messe] die Wissenschaft von den meßbaren Größen). Das Wort γεωμετρία bedeutet zunächst Feldmeßkunst, doch wird dieses Wort gewöhnlich nicht in dieser beschränkten, sondern in der angegebenen weitern Bedeutung genommen.

§. 7.

a. Nimmt man auf die Art und Beschaffenheit der Einheiten, aus welchen eine zählbare Größe besteht, keine Rücksicht, setzt man z. B. drei, ohne dabei anzugeben, ob man unter dieser Größe drei Gulden oder Pfunde oder Ellen oder Meilen u. s. w. zu verstehen habe, so daß also von jeder Eigenschaft dieser Größe Umgang genommen, d. h. abstrahirt worden ist, so heißt diese Größe eine unbenannte oder abstrakte Größe. Ueberhaupt nennt man zählbare Größen, in so fern man bloß die in ihnen enthaltene Menge von Einheiten betrachtet, Zahlen.

b. Wird die nähere Beschaffenheit der Einheiten, aus welchen eine Größe besteht, angegeben, spricht man also z. B. von einem Thaler, fünf Pfunden, zwei Ellen, vier Meilen u. s. f., so nennt man diese Größe eine benannte oder konkrete Größe.

§. 8.

Die vorzüglichsten Sätze, in welchen die Lehren der Mathematik und ihre Anwendung vorgetragen werden, sind folgende:

1. die Erklärung, Definition,
2. der Grundsatz, Axiom,
3. der Lehrsatz, Theorem,
4. die Aufgabe, Problem.

1. Die Erklärung ist ein Satz, welcher die wesentlichen *) Merkmale eines Gegenstandes so bestimmt angiebt, daß dieser von jedem andern unterschieden, folglich mit keinem andern verwechselt werden kann. Wird z. B. eine Erklärung vom Quadrate verlangt, so ist es nicht genug, zu sagen: das Quadrat ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten hat, oder, das Quadrat ist ein Viereck, welches vier rechte Winkel hat, weil es Vierecke giebt, die theils vier gleiche Seiten, theils vier rechte Winkel haben, ohne deßwegen Quadrate zu seyn, so daß also in diesem Falle vom Quadrate eine Erklärung gegeben worden wäre, welche auch für andere Figuren paßte, und somit jenes mit diesem verwechselt werden könnte; sondern es muß gesagt werden: das Quadrat ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

Jede Erklärung muß vollständig seyn.

2. Der Grundsatz ist ein Satz, der eine so einfache und leichtfaßliche Wahrheit enthält, daß man dieselbe sogleich einsieht, wenn man nur den Sinn der

---

*) Unterschied zwischen wesentlichen und ausserwesentlichen oder zufälligen Merkmalen.

Worte richtig gefaßt hat. Wird z. B. ausgesprochen: Das Ganze ist größer als ein oder als einige Theile desselben, so wird Jeder von der Wahrheit dieser Behauptung ohne weitere Vermittelung vollkommen überzeugt seyn, und somit diesen Satz als einen Grundsatz anerkennen.

3. Der Lehrsatz ist ein Satz, welcher, wie der Grundsatz, eine Wahrheit ausspricht, die jedoch nicht so einfach ist, daß man erwarten und voraussetzen darf, es werde dieselbe Jeder sogleich und unmittelbar begreifen, und die daher aus bereits bekannten Gründen näher dargestellt, d. h. bewiesen werden muß. Beweisen heißt, die Wahrheit eines Satzes aus bereits bekannten und unbezweifelbaren Gründen so vollständig auseinander setzen, daß ein vernünftiges Zweifeln nicht mehr möglich ist. *)

4. Die Aufgabe ist ein Satz, welcher die Bewerkstelligung irgend eines Dinges verlangt. Der Satz: Eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, ist daher eine Aufgabe, weil in demselben die Bewerkstelligung einer Sache verlangt wird. Es ist jedoch nicht genug, die Bewerkstelligung einer Sache bloß zu verlangen: es müssen auch die Mittel und Wege gezeigt werden, wie das in der Aufgabe Verlangte be-

*) Aus dem, was beweisen heißt, ersieht man, daß ein allgemeiner Grundsatz weder eines Beweises bedarf, noch bewiesen werden kann; denn bedürfte der Grundsatz eines Beweises, und könnte derselbe gegeben werden, so würde sich ein Grundsatz auf einen oder auf mehrere Sätze, die bereits als wahr anerkannt worden sind, stützen, und wäre somit kein Grundsatz.

werkstelligt werden könne. Dieß geschieht durch die **Auflösung**, welche unmittelbar auf die Aufgabe folgt. Der Auflösung folgt endlich der **Beweis**, welcher die Richtigkeit der Auflösung zeigt, d. h. darthut, daß man das in der Aufgabe Verlangte wirklich erhalte und erhalten müsse, wenn man nur nach der in der Auflösung enthaltenen Anweisung verfährt. Der Beweis wird häufig mit der Auflösung verbunden.

§. 9.

Man läßt sehr oft unmittelbar auf die im §. 8 genannten Sätze, zur weiteren Erläuterung derselben, einen oder mehrere Sätze folgen, die sich aus ihnen leicht ableiten lassen und sich auf sie stützen. Solche Sätze heißen **Zusätze**.

Ist in Beziehung auf Lehrvortrag, besondere Anwendung eines Satzes, die Erfindung desselben u. s. w. Etwas zu bemerken, so geschieht dieß gewöhnlich in einer **Anmerkung**.

§. 10.

a. Wenn sich zwei Dinge hinsichtlich ihrer Größe (Quantität) nicht unterscheiden, so sagt man, sie sind **gleich**. Um anzudeuten, daß zwei Dinge einander gleich sind, setzt man zwischen dieselben das Zeichen (=); z. B. zehn Kronthaler = siebenundzwanzig Gulden heißt: zehn Kronthaler sind hinsichtlich ihres Werthes siebenundzwanzig Gulden gleich. $A = B$ (A gleich B) bedeutet daher im Allgemeinen: A ist hinsichtlich seiner Größe von B nicht unterschieden.

b. Sind zwei Dinge hinsichtlich ihrer Größe (Quan-

tität) von einander unterschieden, so sagt man, sie sind **ungleich**. Um die Ungleichheit zweier Dinge anzudeuten, setzt man zwischen sie folgendes Zeichen (>), wobei zu bemerken ist, daß die Oeffnung des Zeichens gegen die größere, die Spitze des Zeichens gegen die kleinere der beiden betrachteten Größen zu stehen kommt. $A > B$ heißt daher, A ist größer als B; $A < B$ heißt, A ist kleiner als B.

§. 11.

Allgemeine Grundsätze.

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.

2. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich.

3. Das Ganze ist größer als ein oder einige Theile desselben.

4. Gleiche Größen lassen sich hinsichtlich ihrer Gleichheit für einander setzen.

5. Wenn ein Ding A einem Dinge C, und eben diesem Dinge C ein Ding B gleich ist, so ist auch $A = B$; d. h. zwei Größen A und B, von welchen jede für sich betrachtet einer dritten Größe C gleich ist, sind auch unter sich gleich.

Dieser Grundsatz wird gewöhnlich so dargestellt:

Ist $A = C$ und
$B = C$, so ist auch
$A = B$.

6. Gleiches auf gleiche Art verändert giebt Gleiches.

7. Gleiches auf ungleiche, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert giebt Ungleiches.

Erster Abschnitt.

Von der Arithmetik überhaupt.

§. 12. Erklärung.

Die Arithmetik oder Zahlenlehre (Rechenkunst) ist die Wissenschaft von den Zahlen, d. h. von den Größen, in so fern diese durch Zahlen dargestellt werden können. Sie lehrt die Gesetze für die verschiedenen Veränderungen, die mit den Zahlen vorgenommen werden können, und wie sich mit Hilfe dieser Veränderungen aus gegebenen Zahlen andere, die auf irgend eine Weise von ihnen abhängig sind, ableiten lassen.

§. 13. Erklärungen.

a. Wenn die Einheit d. h. Eins ein- oder mehreremale genommen wird, so entsteht eine ganze Zahl. So sind z. B. drei Pfunde, sieben Meilen, wenn man diese Größen bloß nach ihrer Menge betrachtet, ganze Zahlen. Eben so sind zehn oder sieben oder sechs ganze Zahlen (§. 7).

b. Wird aber ein Ganzes in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt, und nimmt man von diesen einen oder mehrere, so heißen diese genommenen Theile, in Vergleichung mit dem Ganzen, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. So sind z. B. drei Viertel Ellen, als Zahl betrachtet, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, weil diese Größe nicht die Einheit selbst, nämlich eine Elle, oder das Mehrfache der Einheit, nämlich der Elle, sondern das Mehrfache eines Theils der Einheit ist.

§. 14. Erklärungen.

a. Wenn eine Einheit ein Vielfaches einer andern Einheit ist, so heißt jene eine höhere, diese eine niedrigere Einheit. So ist z. B. ein Zentner in Beziehung auf das Pfund eine Einheit höherer Art; ein Pfund aber in Beziehung auf den Zentner eine Einheit niedrigerer Art. So heißt ferner die Einheit, welche zur Größe vierzehn Tage gehört, ein Tag. Diese Einheit ist aber aus vierundzwanzig Einheiten einer niedrigern Art entstanden, nämlich aus Stunden. Die Stunde hält sechzig Einheiten, wovon jede eine Minute heißt; die Minute hält wieder sechzig Sekunden. Die Minute ist also in Beziehung auf die Sekunde eine Einheit höherer und in Beziehung auf die Stunde eine Einheit niedrigerer Art. Auf gleiche Weise ist die Stunde in Beziehung auf die Minute eine Einheit höherer und in Beziehung auf den Tag eine Einheit niedrigerer Art.

b. Jede Zahl, folglich auch jede höhere Einheit, ist aus Eins entstanden oder abgeleitet worden; dem Eins

selbst aber liegt keine andere Einheit zu Grunde: man nennt daher Eins die absolute oder primitive Einheit.

§. 15. Erklärung.

Wenn man aus einer bestimmten Anzahl von Einheiten eine Einheit höherer Art bildet, und aus der nämlichen Anzahl solcher höheren Einheiten, also durch eine gleichförmige Wiederholung, aufs Neue eine Einheit höherer Art ableitet u. s. w.; so erhält man verschiedene Klassen oder Ordnungen von Einheiten, so daß also auch jede einzelne Zahl zu einer bestimmten Klasse oder Ordnung gehört: Auf diese Weise entsteht ein Zahlensystem.

§. 16. Erklärung.

Zählt man von der primitiven Einheit, d. h. von Eins bis Zehn, und nimmt nun Zehn als eine Einheit der nächsthöhern oder zweiten Ordnung; nimmt man nun wieder zehn Einheiten dieser Ordnung als eine Einheit der dritten Ordnung u. s. w., so daß also überhaupt das Zehnfache jeder Einheit eine Einheit der nächsthöhern Ordnung giebt, so zählt man nach Dezimalordnungen, und erhält auf diese Weise das Dezimalsystem, das sich durch seine Einfachheit besonders empfiehlt und daher auch allgemein üblich ist.

Zusatz. 1. Nach der griechischen Sprache heißt das System, in welchem nach Dezimalordnungen gezählt wird, das dekadische System oder die Dekadik. δέκα, δεκαδικός.)

Zusatz. 2. Im bürgerlichen Leben bedient man sich

bei Eintheilungen häufig desjenigen Systems, nach welchem zwölf Einheiten einer niedrigern Ordnung eine Einheit der nächsthöhern Ordnung bilden, und welches daher das Duodezimalsystem oder das dodekadische System genannt wird. So geben nach diesem Systeme zwölf Linien einen Zoll, zwölf Zolle einen Fuß, zwölf Fuß eine Ruthe.

Nach einem andern Systeme, welches sich schon bei den ältesten Völkern findet, geben sechzig Einheiten einer niedrigern Art eine Einheit der nächsthöhern. Es heißt dasselbe das Sexagesimalsystem. So gehen (bei der Kreiseintheilung) sechzig Tertien auf eine Sekunde, sechzig Sekunden auf eine Minute, sechzig Minuten auf einen Grad.

§. 17. Erklärung.

Die Anzahl der Einheiten der verschiedenen Ordnungen drückt man durch folgende Zeichen oder Ziffern aus:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0.
eins,	zwei,	drei,	vier,	fünf,	sechs,	sieben,	acht,	neun,	null.

1 bedeutet also eine Einheit, 2 bedeutet zwei Einheiten irgend einer Ordnung u. s. w. Null (0) ist eine Hilfsziffer und bedeutet, daß keine Einheit vorhanden ist.

§. 18. Erklärung.

Die Ordnungen, zu welchen die einzelnen Zahlzeichen im Dezimalsysteme gehören, werden durch die Stellen angedeutet, die man ihnen giebt.

1. Die äusserste Stelle zur Rechten erhalten die

Zahlzeichen, welche sich auf Einheiten der ersten Ordnung beziehen, welche Einer heißen. Ist also bloß eine Ziffer z. B. 3 angesetzt, so bezieht sich diese auf Einheiten der ersten Ordnung, d. h. auf Einer.

2. Die nächste Stelle gegen die Linke erhalten die Ziffern, welche sich auf Einheiten der zweiten Ordnung beziehen, welche Zehner heißen. Ist eine zweiziffrige Zahl gegeben, deren äusserste Ziffer 0 ist, so daß dieselbe bloß Zehner und keine Einer hat, so spricht man 10 mit zehn, 20 mit zwanzig, 30 mit dreißig, 40 mit vierzig, 50 mit fünfzig, 60 mit sechzig, 70 mit siebzig, 80 mit achtzig, 90 mit neunzig aus. Hat die Zahl ausser Zehnern auch Einer, so spricht man diese zuerst aus, und trennt beim Aussprechen die Einer von den Zehnern durch die Sylbe und; z. B. 37 wird ausgesprochen siebenunddreißig. Enthält die Zahl nur einen Zehner, so bleibt beim Aussprechen die Sylbe und weg; z. B. 18 heißt achtzehn. Die Zahl 11 wird ausgesprochen eilf, und 12 wird ausgesprochen zwölf.

3. Die folgende dritte Stelle gegen die Linke erhält das Zahlzeichen, welches sich auf Einheiten der dritten Ordnung bezieht, welche Hunderter heißen. Besteht die Zahl bloß aus Hundertern, stehen also an der zweiten und ersten Stelle Nullen, so spricht man die Einheiten, welche an der dritten Stelle stehen, aus und setzt das Wort hundert bei; z. B. 100 heißt einhundert oder bloß hundert, 200 heißt zweihundert u. s. w. Hat die Zahl ausser Hundertern auch Einer, aber keine Zehner, so spricht man, wie gezeigt, die Hunderter aus, läßt hierauf die Einer folgen, trennt

diese aber beim Aussprechen von den Hundertern durch die Sylbe und; z. B. 508 heißt fünfhundert und acht. Die Sylbe und kann auch wegbleiben. Hat die dreiziffrige Zahl ausser Einern auch Zehner, so giebt man zuerst die Hunderter an, und spricht die Zehner und Einer nach Nr. 2 aus.

4. Die folgende vierte Stelle von der Rechten gegen die Linke erhält die Ziffer, welche sich auf Einheiten der vierten Ordnung bezieht, welche Tausender heißen; die fünfte Stelle erhält die Ziffer, welche sich auf Einheiten der fünften Ordnung, nämlich auf Zehntausender bezieht, und die sechste Ziffer von der Rechten gegen die Linke bezieht sich auf Einheiten der sechsten Ordnung, nämlich auf Hunderttausender. So heißt 3000 dreitausend, 4506 wird ausgesprochen viertausend fünfhundert und sechs; 10000 heißt zehntausend, 40000 heißt vierzigtausend, 37000 heißt sieben und dreißig tausend; 48906 heißt acht und vierzig tausend, neunhundert und sechs; 100000 heißt hunderttausend; 700000 heißt siebenhunderttausend; 420000 heißt vierhundertzwanzigtausend; 354000 heißt dreihundert vier und fünfzigtausend; 706308 heißt siebenhundert sechstausend, dreihundert und acht.

Zusatz. 1. Die Nullen, welche an die Stellen, an denen Einheiten fehlen, gesetzt werden, sind nothwendig. Ließe man z. B. bei der Zahl 305 die Null weg, so daß man also 35 statt 305 setzte, so würde die Ziffer 3 aus der dritten Stelle an die zweite rükken, folglich nicht mehr auf Hunderter, sondern auf Zehner sich beziehen, wodurch der Werth der gegebenen Zahl gänzlich abgeändert würde.

Zusatz. 2. Wenn eine Null die äußerste Stelle zur Linken einer Zahl einnimmt, so ändert sie den Werth der Zahl nicht; so ist z. B. 0298 nicht mehr und nicht weniger als 298. Wenn nicht ein besonderer Grund vorhanden ist, so wird nie zur Linken einer Zahl eine Null angesetzt.

§. 19. Erklärung.

Die Zahlzeichen haben nach §. §. 17 und 18 eine doppelte Bedeutung. Die Menge der durch eine Ziffer dargestellten Einheiten bestimmt den natürlichen Werth des Zahlzeichens; die Stelle aber, welche ein Zahlzeichen einnimmt, bestimmt seinen Lokalwerth. Z. B. in der Zahl 576 ist sieben der natürliche Werth des Zahlzeichens 7; die Stelle aber, welche das Zahlzeichen hat, giebt an, daß 7 von der zweiten Ordnung also vom Range der Zehner ist.

§. 20. Erklärung.

Jede durch Ziffern dargestellte Zahl nach einem gewissen Systeme, also hier nach dem Dezimalsysteme, aussprechen, so wie auch jede durch Worte ausgedrückte Zahl durch die entsprechenden Ziffern bezeichnen, heißt Numeriren.

Zusatz. Die 9 Zahlzeichen mit der Hilfsziffer 0 (§. 17) reichen hin, jede auch noch so große Zahl nach dem Dezimalsysteme zu bezeichnen.

§. 21. Aufgabe.

Jede mit Ziffern bezeichnete Zahl zu lesen, d. h. mit Worten auszusprechen.

Auflösung.

1. Besteht die gegebene Zahl höchstens aus 6 Ziffern, so ergiebt sich das Lesen derselben aus §. 18.

2. Besteht die gegebene Zahl aus mehr als 6, jedoch weniger als 13 Ziffern, so theile man dieselbe von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu 6 Ziffern ein, wiewohl die zweite Klasse auch weniger als 6 Ziffern erhalten kann. Am Ende der ersten Klasse, also nach der sechsten Ziffer von den Einern an gerechnet, setze man oben das Zeichen (′), und merke sich, daß die zur Linken dieses Zeichens stehenden Ziffern Millionen heißen. Ist z. B. die Zahl 17506713 gegeben, so setze man nach der sechsten Ziffer das Zeichen (′), also 17′506713 und spreche 17 Millionen, 506 Tausend 713. Ferner 708412′083169 wird gelesen 708 Tausend 412 Millionen, dreiundachtzigtausend, 169.

3. Besteht die Zahl aus mehr als 12 und höchstens 18 Ziffern, so theile man sie in Klassen zu 6 Ziffern ein, wenn auch die äusserste Klasse zur Linken weniger als 6 Ziffern erhalten sollte, setze am Ende der zweiten Klasse, also nach der zwölften Ziffer von den Einern an gerechnet oben das Zeichen (″), und merke, daß die zur Linken dieses Zeichens stehenden Ziffern Billionen heißen. Ist die Zahl 4535004710387004 gegeben, so theile man sie in Klassen, also 4535″004710,387004 und spreche 4535 Billionen, 4710 Millionen, 387 Tausend und vier. Ferner 379080″005230′561206 wird ausgesprochen 379 Tausend und 80 Billionen, 5230 Millionen, 561 Tausend, 206.

4. Besteht die Zahl aus mehr als 18 und höchstens 24 Ziffern, so setze man nach der dritten Klasse d. h. nach der 18ten Ziffer oben das Zeichen (‴), und merke sich, daß die zur Linken dieses Zeichens stehenden Ziffern Trillionen heißen. Ist z. B. 22350428700413906680038 gegeben, so theile man auf folgende Weise in Klassen

III II I

22350428700413906620038, und spreche 22 tausend 350 Trillionen, 428 tausend 700 Billionen, 413 tausend 906 Millionen, 680 tausend und 38.

5. Sollte die gegebene Zahl so viele Ziffern haben, daß man bei der Eintheilung in Klassen zu sechs Ziffern, eine fünfte, sechste, siebente Klasse u. s. w. erhält, was jedoch nicht leicht vorkömmt, so nenne man die Ziffern der fünften Klasse Quadrillionen, die der sechsten Abtheilung Quintillionen, die der siebenten Abtheilung Sextillionen u. s. f., spreche sodann von der Linken gegen die Rechte jede einzelne Klasse für sich aus und gebe ihr die entsprechende Benennung. Ist z. B. die Zahl gegeben

V IV III II I

32500470013664452897563210040984 37, so spreche man: 3250 Quintillionen, 47001 Quadrillionen, 366445 Trillionen, 289756 Billionen, 321004 Millionen, 98437.

Zusatz. Besteht eine Klasse aus lauter Nullen, so wird sie gar nicht ausgesprochen; z. B.

II I

4000000780041 heißt 4 Billionen (keine Million) 780041.

Aufgaben.

Es sollen folgende Zahlen gelesen werden:

1) 74500463.
2) 1250667495.
3) 4407423655004.
4) 573004780045699.
5) 3500604702793291 7.
6) 5407000000549782390041.
7) 2050059067205834719021769.
8) 3047750006005827945210579373965.

§. 22. Aufgabe.

Jede durch Worte ausgedrückte Zahl durch die entsprechenden Ziffern zu bezeichnen.

Auflösung.

1) Läßt sich die ausgesprochene Zahl durch höchstens 6 Ziffern ausdrücken, so ergiebt sich das Schreiben derselben aus §. 18. Soll z. B. die Zahl einhundert sechs und dreißig tausend, fünfhundert und zwölf mit Ziffern geschrieben werden, so erhält man 136512. Soll ferner fünfhundert und sieben tausend, dreihundert und eins mit Ziffern geschrieben werden, so erhält man 507301.

2) Erfordert die durch Worte ausgesprochene Zahl mehr als 6 Ziffern, also auch mehr als eine Abtheilung oder Klasse von 6 Ziffern, wiewohl die äusserste Klasse zur Linken immer weniger als 6 Ziffern erhalten kann, so schreibe man zuerst die höchste Klasse z. B. die Trillionen an, lasse zur Rechten die nächstniedrige Klasse, also im gegebenen Falle die Billionen folgen, bis man endlich zu den Einern gelangt. Soll z. B.

die Zahl 24 Trillionen, 560tausend 307 Billionen, 223tausend 407 Millionen, 956tausend 366 mit Ziffern dargestellt werden, so erhält man

iii ii i
24560307223407956366. Ferner für die Zahl 38 Trillionen, 7568 Billionen, 97501 Millionen, 8002

iii ii i
erhält man 38007568097501008002.

Zusatz. Hier ist besonders zu merken, was §. 18 Zus. 1 erinnert worden ist.

Aufgaben.

Es sollen folgende Zahlen mit Ziffern geschrieben werden.

1) Siebenhundert acht und sechzig tausend, zweihundert und sieben.

2) Neunhunderttausend und vierundzwanzig.

3) Zwölf Millionen, zweihundert vier und dreißigtausend und zwölf.

4) Achthundertvierzehn Millionen, zweitausend und fünf.

5) Neuntausend und sechzehn Millionen, fünfundvierzigtausend und eins.

6) Siebenhundert acht und dreißig tausend und fünf Millionen, und achtundsiebzig.

7) Neun Billionen, sechsundzwanzigtausend und drei Millionen, siebzehntausend und vierzehn.

8) Dreitausend vierhundert und neun Billionen, zweitausend und acht Millionen, eintausend dreihundert und zwei.

9) Vierzehn Trillionen, neunzehntausend und sechzehn Billionen, vierunddreißig Millionen, neuntausend und zwei und zwanzig.

10) Acht und vierzig tausend und sechs Trillionen, zwei Billionen, fünfzehn Millionen und sechs und dreißig.

11) Zwei Quadrillionen, siebenhundert acht und siebzig Billionen, fünfhundertsechzig Millionen, dreitausend und vier.

12) Acht Quadrillionen, dreihundert neun und sechzig tausend Trillionen, siebenhundert achtzehn Billionen, zwei Millionen, und zwei und siebzig.

Zweiter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit unbenannten ganzen Zahlen.

A. Addition.

---

§. 23. Erklärungen.

a) Addiren heißt zwei oder mehrere gegebene Zahlen zu einem Ganzen verbinden, d. h. eine Zahl finden, welche dem Inbegriffe gegebener Zahlen gleich ist.

b) Die einzelnen Zahlen, die zu einem Ganzen verbunden oder addirt werden sollen, heißen die Summanden; der Inbegriff derselben heißt ihre Summe.

c) Das Zeichen für die Addition ist folgendes (+). Dieses Zeichen wird zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt, und mit plus oder und ausgesprochen. So bedeutet z. B. 3 + 4 (3 plus 4), daß die beiden Zahlen 3 und 4 zu einem Ganzen verbunden werden sollen. In diesem Falle sind also 3 und 4 die Summanden, 7 aber ist ihre Summe, d. h. 3 + 4 = 7 (§. 10. a).

Zusatz. 1. Im Ausdrucke $3 + 4$ ist zwar die Addition noch nicht vollzogen, sondern einstweilen angedeutet, doch läßt sich der Ausdruck $3 + 4$ in so fern als eine Summe betrachten, als als man sich nicht die einzelnen Zahlen 3 und 4, sondern ihren Inbegriff vorstellt.

Zusatz. 2. Die Summe zweier oder mehrerer Summanden bleibt ungeändert, wenn auch die Ordnung, in welcher die Summanden auf einander folgen, abgeändert wird; z. B. $5 + 7 = 7 + 5 = 12$. Eben so ist $7 + 4 + 9 = 4 + 7 + 9 = 7 + 9 + + 4 = 4 + 9 + 7 = 9 + 4 + 7 = 9 + 7 + + 4 = 20$.

§. 24. Grundsätze.

1) Gleiches zu Gleichem addirt giebt gleiche Summen (§. 11. N. 6); z. B.

$$\begin{array}{r} 2 + 3 = 5 \\ 4 = 4 \\ \hline 2 + 3 + 4 = 5 + 4 \end{array}$$

2) Ungleiches zu Gleichem, oder Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt ungleiche Summen (§. 11. N. 7); z. B.

$$\begin{array}{r} 2 + 3 = 5; \\ 7 > 4 \text{ (§. 10. b.)} \\ \hline 2 + 3 + 7 > 5 + 4 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 4 + 3 = 7 \\ 6 < 9 \\ \hline 4 + 3 + 6 < 7 + 9 \end{array}$$

Ferner

$$\begin{array}{r} 12 > 5 + 4; \\ 7 = 7 \\ \hline 12 + 7 > 5 + 4 + 7 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 9 < 13 \\ 4 = 4 \\ \hline 9 + 4 < 13 + 4 \end{array}$$

Eben so ist auch

$$\begin{array}{ll} 16 > 8 + 3; \quad \text{oder} & 7 + 4 < 8 + 5 \\ \underline{\;5 > 2\qquad\qquad} & \underline{\qquad\qquad 2 < 3} \\ 16 + 5 > 8 + 3 + 2; & 7 + 4 + 2 < 8 + 5 + 3 \end{array}$$

d. h. Wenn man zu einer größern Größe mehr addirt als zu einer kleinern, so ist die erste Summe größer als die zweite. Wird aber zu einer kleinern Größe weniger addirt als zu einer größern, so ist die erste Summe kleiner als die zweite.

§. 25. Aufgabe.

Eine Tabelle zu verfertigen, mit deren Hilfe die Summe für jede zwei einziffrige Zahlen gefunden werden könne.

Auflösung.

1) Man setze die einziffrigen Zahlen von 1 bis 9 der Ordnung nach in eine horizontale Reihe.

2) Unter jede dieser Zahlen setze man die nächsthöhere, also unter 1 die Zahl 2, unter 2 die Zahl 3 u. s. w., so daß man also eine Reihe erhält, welche mit 2 beginnt und mit 10 endigt.

3) Unter jede Zahl dieser zweiten Reihe setze man die nächstgrößere, so erhält man eine dritte Reihe, welche mit 3 beginnt und mit 11 endigt.

4) Auf diese Weise bestimme man immer wieder eine neue Horizontalreihe, bis endlich die zehnte mit 10 beginnt, also mit 18 endigt.

5) Diesen Reihen zur Linken setze man nun noch eine senkrechte Reihe, welche die Zahlen von 1 bis 9 enthält, und zwar bei der zweiten Horizontalreihe mit 1 beginnt, also bei der letzten mit 9 endigt.

6) Durch das Verfahren Nr. 1 — 5 erhält man folgende Tafel:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

§. 26. Aufgabe.

Mit Hilfe der vorstehenden Tafel zu jeden zwei einziffrigen Zahlen die Summe zu finden.

Auflösung.

1) Man nehme in der äussersten senkrechten Reihe

zur Linken den einen und in der obersten Horizontalreihe den andern Summanden.

2) Von dem Summanden, welchen man in der senkrechten Reihe genommen hat, gehe man nach horizontaler Richtung weiter gegen die Rechte, und von dem Summanden in der ersten Horizontalreihe gehe man senkrecht abwärts.

3) Da wo sich diese beiden Richtungen durchschneiden, findet sich die gesuchte Summe.

Ist z. B. die Summe der beiden Zahlen 6 und 8 zu bestimmen, so nehme man in der äussersten senkrechten Reihe zur Linken die Zahl 6 und in der ersten Horizontalreihe die Zahl 8. Geht man nun von 6 in horizontaler Richtung gegen die Rechte, und von 8 senkrecht abwärts, so durchschneiden sich diese Richtungen da, wo die Zahl 14 steht. Es ist $6 + 8 = 14$.

Zus. Es ist gleichviel, ob man den ersten Summanden in der ersten senkrechten oder in der ersten Horizontalreihe annimmt. (§. 23. Zus. 3).

Anmerkung. Die Addition zweier einziffrigen Zahlen muß so lange fortgesetzt werden, bis die Summe jeder zwei einziffrigen Zahlen ohne Hilfe der nebenstehenden Tafel sicher und schnell angegeben werden kann.

§. 27. Aufgabe.

Zu einer zweiziffrigen Zahl eine einziffrige zu addiren.

Auflösung.

1) Man addire die einziffrige Zahl zu den Einern, welche in der zweiziffrigen Zahl vorkommen.

2) Ist die Summe eine einziffrige Zahl, so schreibe man diese an, und setze die Zehner, welche in der gegebenen zweiziffrigen Zahl enthalten sind, zur Linken bei; z. B.

23 + 5 = 28; 11 + 6 = 17; 23 + 4 = 27.

3) Ist die Summe der Einer eine zweiziffrige Zahl, welche in jedem Falle unter 20 ist, d. h. enthält die Summe ausser Einern auch einen Zehner, so setze man die Einer an, und nehme den Zehner zu den Zehnern der gegebenen zweiziffrigen Zahl; z. B. 48 + 7 = 55; d. h. 7 und 8 ist 15, d, i. 5 Einer und 1 Zehner. Die 5 Einer setze man an, den einen Zehner nehme man zu den 4 Zehnern, welche in 48 liegen, so daß man also im Ganzen 5 Zehner und 5 Einer erhält, d. i. 55. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 48 &= 40 + 8 \\ 7 &= \phantom{40 + {}} 7 \\ \hline 48 + 7 &= 40 + 8 + 7 \\ &= 40 + 15 \\ &= 40 + 10 + 5 \\ &= 50 + 5 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Eben so ist 56 + 9 = 65; 72 + 8 = 80 95 + 7 = 102.

Zusatz. Sind mehrere einziffrige Zahlen zu addiren, so bestimme man die Summe der beiden ersten Zahlen, zu dieser addire man die dritte Zahl, zur Summe aus den drei ersten Zahlen addire man die vierte u. s. w. Sollen die Zahlen 9, 5, 8, 4, 3, 7 addirt werden, so setze man

$$9 + 5 = 14$$
$$14 + 8 = 22$$
$$22 + 4 = 26$$
$$26 + 3 = 29$$
$$29 + 7 = 36$$

Auf die Ordnung, in welcher die Summanden auf einander folgen, kömmt es nicht an. (§. 23. Zus. 3.)

§. 28. Aufgabe.

Mehrere gegebene Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1) Man setze die gegebenen Zahlen so unter einander, daß nur Ziffern von gleichem Lokalwerthe unter einander zu stehen kommen, d. h. Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f., und ziehe unten einen horizontalen Strich.

2) Man addire nun die in einer Reihe unter einander stehenden Einer, und setze die Summe derselben, wenn sie nicht über 9 beträgt, darunter. Ist aber die Summe derselben größer als 9, folglich 10 oder über 10, so daß sie einen oder mehrere Zehner enthält, so setze man nur die Einer unter die Klasse der Einer, die Zehner aber behalte man einstweilen im Gedächtnisse.

3) Die so erhaltenen Zehner addire man zu den Ziffern in der Klasse der Zehner. Ist nun die Summe derselben nicht über 9, so setze man sie unter die Klasse der Zehner. Ist aber die Summe größer als 9, d. h. enthält sie ausser Zehnern auch einen oder mehrere Hunderter, so setze man nur die Zehner unter die Klasse der Zehner, die Hunderter aber addire man zu den Ziffern in der Klasse der Hunderter.

4) Eben so verfahre man mit den Hundertern, Tausendern u. s. w.

Beweis.

Man hat alle Einer, Zehner, Hunderter u. s. f. der Ordnung nach addirt, folglich ist die gefundene Zahl dem Inbegriffe aller einzelnen Summanden gleich, d. h. ihre Summe. (§. 23.)

Beispiel.

Folgende Zahlen sollen addirt werden: 174093, 279804, 5006.

Auflösung.

```
 174093
 279804
   5006
 ------
 458903
```

Die Summe der Einer ist 13. Man setze die 3 Einer unter die Klasse der Einer und nehme den Zehner zu den Ziffern in der Klasse der Zehner. Die Summe der Zehner ist 10. Da nun aber 10 Zehner gerade einen Hunderter ausmachen, so setze man unter die Klasse der Zehner 0 und nehme den Hunderter zu den Ziffern der dritten Klasse. Die Summe der Hunderter ist 9; man schreibe also 9 unter die Klasse der Hunderter. Die Summe der Tausender ist 18, d. h. ein Zehntausender und Achttausender. Man setze also unter die Klasse der Tausender 8 und nehme den Zehntausender zu den Ziffern der folgenden Klasse. Die Summe der Zehntausender ist 15, d. h. ein Hunderttausender und 5 Zehntausender. Man setze also unter die Klasse der Zehntausender 5, und nehme den Hunderttausender zu den Ziffern der folgenden Klasse. Die

Summe der Hunderttausender ist 4; man schreibe also unter diese Klasse 4.

Zusatz. 1. Der Anfänger wird, besonders bei der Addition vieler Zahlen, wohl thun, wenn er alle Ziffern der einzelnen Summen der senkrechten Reihen anschreibt, und sich dadurch das Merken einer Ziffer erspart. Enthält z. B. die Summe aus den Einern auch einen oder einige Zehner, so setze er die Einer unter die Einer, und schreibe die Zahl, welche sich auf Zehner bezieht, statt sie im Gedächtnisse zu behalten, mit kleiner Schrift unter die Reihe der Zehner u. s. f. Man soll z. B. folgende Zahlen addiren:

```
 59402376
 42580797
  3460594
 78921158
 31289271
 58430435
 3321243
---------
274084631
```

Dieses Ausschreiben der einzelnen Summen gewährt besonders in dem Falle Vortheil, wenn man bei irgend einer Reihe gefehlt zu haben glaubt, und den Fehler entdecken will. Schreibt man nämlich die einzelnen Summen nicht aus, entsteht aber nach vollendeter Rechnung aus irgend einem Grunde die Vermuthung, daß man z. B. bei der Addition der Ziffern der Hunderter geirrt habe, so wird man wahrscheinlich nicht mehr wissen, wie viele Hunderter aus der Klasse der Zehner herübergezogen worden sind, und man wird deßhalb die Rechnung vom Anfange an wiederholen müssen.

Diese Unbequemlichkeit fällt beim Ausschreiben der einzelnen Summen weg.

Zusatz. 2. Um sich von der Richtigkeit einer vorgenommenen Addition zu überzeugen, nehme man die zu addirenden Zahlen in einer andern Ordnung. Hat man z. B. die Ziffern der einzelnen Reihen von unten nach oben addirt, was gewöhnlich geschieht, so addire man nun dieselben von oben nach unten. Erhält man in beiden Fällen eine gleiche Summe, so ist auf die Richtigkeit der Rechnung mit großer Wahrscheinlichkeit zu schließen.

Anmerkung. Später wird ein anderes sichereres Kennzeichen für die Richtigkeit einer vorgenommenen Addition angegeben werden.

§. 29. Aufgaben.

Folgende Zahlen sollen addirt werden:

1) 5491 + 8023 + 5645.

2) 407219 + 594784 + 210056 + 823342.

3) 9904523 + 8733296 + 4702180 + 519348 + 60321 + 98256.

4) 42704183 + 9875201 + 139742 + 9807334 + 22180043 + 2350897.

5) 34201984 + 35642895 + 4521689 + 967400158 + 25680333 + 72890134 + 745820016 + 58472013 + 34529167.

6) 987045823 + 59472358 + 356400073 + 599420068 + 232304793 + 2847624 + 397548201 + 589315674 + 743289745 + 652800074 + 897502135 + 123897689.

B. Subtraktion.

§. 30. Erklärungen.

a) Subtrahiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere gleichfalls gegebene Zahl wegnehmen und bestimmen, was nach Wegnahme der letztern Zahl von der erstern übrig bleibt, folglich aus zwei gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche den Unterschied zwischen diesen Zahlen angiebt.

b) Die Zahl, von der eine andere weggenommen werden soll, heißt der Minuend; die Zahl, welche wegzunehmen ist, heißt der Subtrahend, und die Zahl, welche nach Wegnahme des Subtrahenden übrig bleibt, heißt der Rest. Weil dieser zugleich angiebt, um wie viel die eine von den gegebenen Zahlen größer ist als die andere, so nennt man denselben auch den Unterschied oder gewöhnlicher die Differenz zwischen den gegebenen Zahlen. Soll z. B. von der Zahl 5 die Zahl 3 subtrahirt werden, so ist 5 der Minuend, 3 der Subtrahend, und 2, welches den Unterschied zwischen 5 und 3 angiebt, heißt der Rest oder die Differenz.

c) Das Zeichen der Subtraktion ist folgendes (—), und wird mit minus oder mit weniger ausgesprochen. Dieses Zeichen wird zwischen den Minuenden und Subtrahenden so gesetzt, daß erster auf die linke, letzter auf die rechte Seite des Zeichens zu stehen kommt; z. B. 5 — 3 = 2 wird gelesen: 5 minus 3 gleich 2.

Zusatz. 1. Im Ausdrucke 5 — 3 ist die Subtraktion noch nicht vollzogen, sondern erst angedeutet, und besonders solche Ausdrücke nennt man Differenzen.

Zusatz. 2. Wenn von einer gegebenen Zahl 0 subtrahirt wird, so erhält man eben diese Zahl als Rest; z. B. 5 — 0 = 5.

Zusatz. 3. Wenn von einer Zahl eine ihr gleiche subtrahirt wird, so erhält man als Rest 0; z. B. 8 — 8 = 0.

§. 31. Grundsätze.

1) Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt gleiche Reste. (§. 11. Nr. 6.) z. B.

$$\begin{array}{r} 9 = 5 + 4 \\ 3 = \phantom{5 +{}} 3 \\ \hline 9 - 3 = 5 + 4 - 3. \end{array}$$

2) Ungleiches von Gleichem, oder Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt ungleiche Reste. (§. 11. Nr. 7.) z. B.

$$\begin{array}{l} 11 = 7 + 4; \text{ oder } 8 = 5 + 3 \\ 5 > \phantom{7 + {}} 2 \qquad\quad 4 < 7 \\ \hline 11 - 5 < 7 + 4 - 2;\ 8 - 4 > 5 + 3 - 7 \end{array}$$

ferner:

$$\begin{array}{l} 9 > 5 + 3; \text{ oder } 7 < 6 + 5 \\ 4 = \phantom{5 +{}} 4 \qquad\quad 3 = \phantom{6+{}} 3 \\ \hline 9 - 4 > 5 + 3 - 4;\ 7 - 3 < 6 + 5 - 3; \end{array}$$

d. h.

Bei gleichen Minnenden und ungleichen Subtrahenden giebt der größere Subtrahend den kleineren, der kleinere Subtrahend den größeren Rest. Bei ungleichen Minuenden, aber gleichen Subtrahenden bleibt vom größeren Minuenden ein größerer Rest.

Ferner:

$$17 > 12 \quad \text{oder} \quad 15 < 18$$
$$3 < 8 \qquad\qquad 12 > 7$$

$17 - 3 > 12 - 8$; $15 - 12 < 18 - 7$; d. h.

Wenn von einer größeren Zahl weniger subtrahirt wird, als von einer kleineren, so ist der erste Rest größer als der zweite. Wird aber von einer kleineren Zahl mehr subtrahirt als von einer größeren, so ist der erste Rest kleiner als der zweite.

Zusatz. Der Unterschied zwischen zwei Zahlen bleibt ungeändert, wenn man zum Minuenden und Subtrahenden Gleiches addirt, oder vom Minuenden und Subtrahenden Gleiches subtrahirt.

§. 32. Aufgabe.

Von einer einziffrigen Zahl eine kleinere einziffrige Zahl zu subtrahiren.

Auflösung.

Man nehme in der obersten Horizontalreihe der in §. 25 gegebenen Tafel den Subtrahenden und in der senkrechten Reihe, in welcher oben der Subtrahend steht, den Minuenden, so giebt die Zahl, welche in der ersten senkrechten Reihe in gleicher Richtung mit dem Minuenden steht, den gesuchten Rest; z. B.

$9 - 5 = 4$; $7 - 2 = 5$.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man mit Hilfe der Tafel in §. 25 eine einziffrige Zahl von einer zweiziffrigen subtrahiren, vorausgesetzt, daß der Unterschied zwischen beiden Zahlen nicht über 9 ist; z. B. $15 - 7 = 8$; $16 - 9 = 7$.

§. 33. Aufgabe.

Von einer gegebenen Zahl eine kleinere zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man setze den Subtrahenden so unter den Minuenden, daß nur Ziffern von gleichem Lokalwerthe unter einander zu stehen kommen, und ziehe unten einen horizontalen Strich.

2) Nun subtrahire man, wenn der Subtrahend weniger Einer hat als der Minuend, die Einer von den Einern, und setze den Rest unter den gegebenen Strich. Eben so verfahre man der Ordnung nach mit den Zehnern, Hundertern u. s. w.

3) Steht an einer Stelle des Subtrahenden eine Null, so setze man das darüber im Minuenden stehende Zahlzeichen in den Rest. (§. 30. Zus. 2.)

4) Sind an einer Stelle die Zahlzeichen im Minuenden und Subtrahenden gleich, so setze man darunter 0 (§. 30. Zus. 3.)

5) Hat an einer Stelle das Zahlzeichen des Subtrahenden mehr Einheiten als das des Minuenden, so nehme man in Gedanken von dem Zahlzeichen der nächsthöhern Ordnung im Minuenden eine Einheit, löse diese in 10 Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung auf, und addire sie zu der Ziffer des Minuenden, von welcher subtrahirt werden soll. Da nun die im Subtrahenden stehende Ziffer höchstens 9 ist, so läßt sich die Subtraktion vollziehen. An die Ziffer, von welcher eine Einheit genommen, oder, wie man sagt, geborgt worden ist, setze man einen Punkt, um dadurch auf-

merksam zu machen, daß die Ziffer um 1 vermindert worden ist.

6) Ist das Zahlzeichen, von dem eine Einheit entlehnt werden muß, eine 0, so borge man von der zunächst darauf folgenden Ziffer eine Einheit. Diese beträgt 10 Einheiten derjenigen Ordnung, für welche 0 steht; nimmt man nun eine von diesen letzteren Einheiten, so vermehrt sie die Ziffer, von der im gegebenen Falle subtrahirt werden soll, um 10, so daß also nun die Subtraktion vollzogen werden kann.

7) Eben so ist leicht einzusehen, wie man zu verfahren habe, wenn im Minuenden mehrere Nullen auf einander folgen.

Beweis.

Nach der Auflösung hat man alle Einer, Zehner u. s. f. des Subtrahenden von den Einern, Zehnern u. s. f. des Minuenden weggenommen; folglich giebt die erhaltene Zahl den Unterschied oder die Differenz der gegebenen Zahlen an, und es ist somit die verlangte Subtraktion vollzogen.

Beispiele.

1) 5897634
3540612
2357022 (Auflösung Nr. 1 — 4.)

2) 35.84.297146
14 92 496045
20 91 801101 (Nr. 1 — 5.)

3) 9.45.0.45.078.2
4 94 0 93 653 4
4 50 9 61 424 8 (Nr. 1 — 6.)

4) 7.2.0.45.0.0.4.0.08.3
1 6 5 94 4 8 7 0 54 9
5 5 4 50 5 1 6 9 53 4 (Nr. 1 — 7.) *)

Zusatz. 1. Durch die Addition werden gegebene Zahlen als Theile zu einem Ganzen verbunden (§. 23); durch die Subtraktion wird ein Ganzes wieder in Theile aufgelöst. Addition und Subtraktion sind also einander entgegengesetzt.

Zusatz. 2. Wenn man von der Summe zweier Zahlen die eine subtrahirt, so erhält man die andere zum Reste; überhaupt, wenn man von der Summe mehrerer Zahlen einen Summanden subtrahirt, so erhält man einen Rest, der dem Inbegriffe der übrigen Summanden gleich ist; z. B. 15 + 36 = 51; 51 — 15 = 36; oder 51 — 36 = 15.

Ferner: 19 + 27 + 53 = 99; 99 — 19 = 80 = 27 + 53; 99 — 27 = 72 = 19 + 53; 99 — 53 = 46 = 19 + 27.

Die Subtraktion ist also die Probe der Addition. (Vergl. §. 28. Zus. 2.)

Zusatz 3. Wenn man zum gebliebenen Reste den Subtrahenden addirt, so erhält man den Minuenden als Summe; z. B. 68 — 43 = 25; 25 + 43 = 68, oder

---

*) Nach einiger Uebung hat man nicht mehr nothwendig, an die Ziffern, von welchen eine Einheit geborgt worden ist, Punkte zu setzen.

59800042134
35794285043
24005757091
35794285043
59800042134

Die Addition dient also zur Probe für die Subtraktion.

§. 34. Aufgaben.

1) 2468596 — 1354275 (§. 30.)
2) 521352584 — 435640549.
3) 104704295 — 98075648.
4) 2040005381 — 1897023894.
5) 7230563214 — 4750478203.
6) 10004072903 — 8205643904.
7) 23059874931 — 41970852.
8) 710342080002 — 9807452975.

C. Multiplikation.

§. 35. Erklärungen.

a) **Multipliziren** heißt, eine gegebene Zahl so oft nehmen, als es eine andere Zahl angiebt.

b) Die Zahl, welche gewisse Male gesetzt werden soll, heißt **Multiplikand**; die Zahl, welche angiebt, wie oft der Multiplikand genommen werden soll, heißt **Multiplikator**, und die Zahl, welche man durch Multiplikation ableitet, heißt das **Produkt** oder **Faktum**. Multiplikand und Multiplikator heißen gemeinschaftlich **Faktoren**.

c) Das Zeichen der Multiplikation ist ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.), welches zwischen die Faktoren gesetzt und mit mal ausgesprochen wird. So bedeutet z. B. der Ausdruck 4 × 5 oder 4 . 5 (4 mal 5) die Zahl 4 soll mit 5 multiplizirt werden.

Zusatz. 1. Obgleich im Ausdrucke 4 × 5 die Multiplikation noch nicht vollzogen ist, so kann man denselben doch in so fern ein Produkt nennen, als man sich nicht die einzelnen Faktoren denkt, sondern die Zahl, die aus ihnen durch die Multiplikation hervorgeht.

Zusatz. 2. Der Multiplikator 1 läßt den Multiplikanden ungeändert. So ist z. B. 45 . 1 = 45; 78 . 1 = 78; 1000 . 1 = 1000.

Zusatz. 3. Wenn ein Faktor 0 ist, so ist das Produkt selbst = 0. Es ist 1 0mal genommen = 0. d. h. Nichts; eben so ist 24 . 0 = 0; 8000 . 0 = 0.

Zusatz. 4. Bestehen die Faktoren aus 2 oder mehreren Theilen, d. h. sind sie Summen oder Differenzen (§. 23. Zus. 1. und §. 30. Zus. 1.), so schließt man dieselben in Klammern ein, und setzt sie mit dem Zeichen (×) oder (.) nebeneinander. Z. B. (4 + 8) × (5 + 2), oder (3 + 7) . (6 — 4).

In diesem Falle kann das Zeichen der Multiplikation ganz entbehrt werden; z. B. (5 + 8) 9; (5 + 7) (8 — 7 + 2); (3 + 9 — 5) (9 — 5 + 1).

Zusatz. 5. Es wird eine Summe, deren Theile einzeln dargestellt sind, multiplizirt, wenn man jeden Summanden multiplizirt und die einzelnen Produkte addirt; z. B.:

$(4 + 7)\,2 = 4 \,.\, 2 + 7 \,.\, 2 = 8 + 14 = 11 \,.\, 2 = 22.$

Zusatz. 6. Es wird eine Differenz multiplizirt, wenn man Minuend und Subtrahend multiplizirt, z. B.

$(9 - 3)\,4 = 9 \,.\, 4 - 3 \,.\, 4 = 36 - 12 = 6 \,.\, 4 = 24.$

Zusatz. 7. Ein Produkt wird multiplizirt, wenn man nur einen Faktor multiplizirt und den andern ungeändert läßt; z. B.

$(4 \,.\, 3)\,2 = 8 \,.\, 3 = 4 \,.\, 6 = 24.$ Eben so ist

$(2 \,.\, 5 \,.\, 4)\,3 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 2 \,.\, 15 \,.\, 4 = 2 \,.\, 5 \,.\, 12 = 120.$

§. 36. Lehrsatz.

Das Produkt entsteht aus dem Multiplikanden, wie der Multiplikator aus der Einheit entstanden ist.

Beweis.

Es sey der Multiplikand die Zahl 5, der Multiplikator die Zahl 4, so ist dieses 4 aus der Einheit dadurch entstanden, daß man dieselbe viermal setzte, denn $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Eben so erhält man aber auch das Produkt, wenn man den Multiplikanden viermal setzt, denn $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Es ist leicht einzusehen, daß man statt 5 und 4 jede beliebige Zahlen setzen könne, und es erhellt somit die Richtigkeit des Satzes.

Zusatz. Wenn Multiplikand und Multiplikator ganze Zahlen sind, so heißt multipliziren, den Multiplikanden so oft nehmen d. h. zu sich addiren, als der Multiplikator Einheiten hat; z. B. 3 . 4 heißt, man soll die Zahl 3 viermal als Summanden setzen, d. i.

3 . 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Die Multiplikation ist also bei ganzen Zahlen eine abgekürzte Addition.

§. 37. Lehrsatz.

Faktoren geben in veränderter Ordnung einerlei Produkte, d. h. es ist gleichviel, welcher Faktor als Multiplikand und welcher als Multiplikator betrachtet wird. *)

Beweis.

Es sey der eine Faktor 4, der andere Faktor 3. Betrachtet man 4 als Multiplikanden, also 3 als Multiplikator, so ist (§. 36.) 4 . 3 = 4 + 4 + 4 = 12; betrachtet man 3 als Multiplikanden und 4 als Multiplikator, so ist 3 . 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12. Es ist also 4 . 3 = 3 . 4 = 12. Es leuchtet ein, daß statt der Zahlen 4 und 3 jede beliebige andere genommen werden können, und es folgt hieraus die allgemeine Giltigkeit des Satzes.

Zusatz. 1. Weil Multiplikand und Multiplikator verwechselt werden können, haben sie die gemeinschaftliche Benennung Faktoren erhalten. (§. 35. c.)

Zusatz. 2. Kommen mehr als zwei Faktoren vor, so können diese in jede beliebige Ordnung gesetzt werden; z. B. 3 . 4 . 6 = 3 . 6 . 4 = 4 . 3 . 6 = 4 . 6 . 3 = 6 . 3 . 4 = 6 . 4 . 3.

Zusatz. 3. Zwei Produkte, welche aus den nämlichen Faktoren bestehen, sind einander gleich.

---

*) Es wird ausdrücklich erinnert, daß hier durchgehends von unbenannten Zahlen die Rede ist.

§. 38. Grundsätze.

1) Gleiches mit Gleichem multiplizirt, giebt gleiche Produkte, z. B.:

$$\begin{array}{l} 8 = 6 + 2 \\ \underline{\;3 = 3\qquad\quad} \\ 8 \,.\, 3 = (6 + 2)\, 3. \end{array}$$ (§. 11. Nr. 6.)

2) Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem multiplizirt, giebt ungleiche Produkte. (§. 11. Nr. 7.) z. B.:

$$\begin{array}{lcl} 9 = 6 + 3; & \text{oder} & 5 + 3 = 8 \\ \underline{\;5 > 4\qquad\quad} & & \underline{\qquad\quad 4 < 6} \\ 9 \,.\, 5 > (6 + 3)\, 4; & & (5 + 3)\, 4 < 8 \,.\, 6. \end{array}$$

Ferner:

$$\begin{array}{lcl} 8 > 6 & \text{oder} & 7 < 9 \\ \underline{3 = 3\qquad} & & \underline{5 = 5\qquad} \\ 8 \,.\, 3 > 6 \,.\, 3; & & 7 \,.\, 5 < 9 \,.\, 5, \end{array}$$ d. h.

Bei gleichen Multiplikanden giebt der größere Multiplikator, und bei gleichen Multiplikatoren der größere Multiplikand das größere Produkt, und so umgekehrt.

Ferner:

$$\begin{array}{lcl} 9 > 5 & \text{oder} & 3 < 8 \\ \underline{4 > 3\qquad} & & \underline{4 < 7\qquad} \\ 9 \,.\, 4 > 5 \,.\, 3; & & 3 \,.\, 4 < 8 \,.\, 7; \end{array}$$ d. h.

das Produkt aus einem größern Multiplikanden und größern Multiplikator ist um so größer als das Produkt aus einem kleinern Multiplikanden und kleinern Multiplikator, und so umgekehrt.

§. 39. Erklärung.

Unter dem sogenannten Einmaleins oder der pythagorischen Tafel versteht man eine Tabelle,

in welcher alle Produkte der ersten 9 Zahlen in einander enthalten sind, und aus derselben leicht gefunden werden können.

§. 40. Aufgabe.

Die pythagorische Tafel zu verfertigen.

Auflösung.

1) Man setze die ersten 9 Zahlen von 1 angefangen, nicht nur in eine horizontale Reihe neben, sondern auch in eine senkrechte Reihe unter einander.

2) Man addire jede einzelne Zahl zu sich selbst, so daß man das Zweifache jeder Zahl erhält, und setze dieses Zweifache unter die zuerst angesetzten 9 Zahlen.

3) Darauf addire man zum Zweifachen jeder Zahl die einfache Zahl selbst, so daß man das Dreifache jeder Zahl erhält, und setze dasselbe unter das Zweifache jeder der ersten 9 Zahlen.

4) Eben so bestimme man das Vierfache, Fünffache, Sechsfache u. s. f. einer jeden zuerst angesetzten Zahl, bis man zur letzten Zahl 9 der gleich Anfangs gebildeten senkrechten Reihe kommt, so daß also die neunte Horizontalreihe das Neunfache einer jeden zuerst angesetzten Zahl enthält.

5) Auf diese Weise entsteht folgende Tabelle:

A.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
B.	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 41. Aufgabe.

Mit Hilfe vorstehender Tafel zu jeden zwei einziffrigen Faktoren das Produkt zu finden.

Auflösung.

Man nehme den einen Faktor in der ersten Horizontalreihe A, den andern in der ersten senkrechten Reihe B, so ist diejenige Zahl, welche mit dem Faktor in der Reihe A in gleicher senkrechter, und zugleich mit dem Faktor in der Reihe B in der nämlichen Horizontalreihe steht, das gesuchte Produkt. Z. B.

$$6 . 8 = 48; \; 7 . 6 = 42.$$

Zusatz. Eine gegebene Zahl wird mit 10 multiplizirt, wenn man ihr zur Rechten eine Null anhängt; z. B. 54 . 10 = 540. Denn die gegebene Zahl 54 besteht aus 4 Einern und 5 Zehnern; 540 aber aus

4 Zehnern und 5 Hundertern, folglich ist die letztere Zahl 10mal größer als die erstere, und somit diese mit 10 multiplizirt. Eben so folgt, daß eine Zahl mit 100 multiplizirt wird, wenn man ihr zur Rechten 2 Nullen anhängt, u. s. w. Z. B.

$$46 \times 100 = 4600$$
$$248 \times 1000 = 248000$$
$$764 \times 10000 = 7640000.$$

Anmerkung. Mit nebenstehender Tafel (§. 40) muß sich Jeder, der im Rechnen auch nur einige Fortschritte machen will, vollkommen bekannt machen und sie dem Gedächtnisse fest einprägen, so daß er, ohne sich erst lange zu besinnen, das Produkt jeder zwei einziffrigen Faktoren angeben kann. So ist es also nicht genug, das Einmaleins in der gewöhnlichen Ordnung, nach welcher der kleinere Faktor vorangeht, auswendig zu wissen, z. B. 7 mal 7 ist 49, 7 mal 8 ist 56 u. s. w., sondern man muß jedes Produkt aus zwei einziffrigen Faktoren, es mag nun der kleinere oder größere Faktor zuerst gesetzt werden, unmittelbar angeben können. Wer also die Frage: Wie viel ist 5 mal 7? schnell zu beantworten weiß, aber auf die Frage: Wie viel ist 9 mal 7? nicht eben so schnell die Antwort findet, ist mit dem Einmaleins noch nicht gehörig vertraut.

§. 42. Aufgabe.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu multipliziren.

Auflösung.

1) Man setze den einziffrigen Multiplikator unter die Einer des Multiplikanden, und ziehe unten einen horizontalen Strich.

2) Mit dem Multiplikator multiplizire man die Einer des Multiplikanden, hierauf die Zehner, Hunderter u. s. f.

3) Enthält das Produkt aus dem Multiplikator in die Einer des Multiplikanden nur eine Ziffer, also bloß Einer, so setze man diese an; ist aber das Produkt aus dem Multiplikator in die Einer des Multiplikanden zweiziffrig, enthält es also ausser Einern auch einen oder mehrere Zehner, so setze man die Einer an, behalte die Zehner im Gedächtnisse, und zähle sie zu dem Produkte aus dem Multiplikator in die Zehner des Multiplikanden.

4) Auf eine ähnliche Weise verfahre man mit den Produkten aus dem Multiplikator in die Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. des Multiplikanden.

Folgendes Beispiel wird das Verfahren veranschaulichen:

Es soll die Zahl 568 mit 7 multiplizirt werden. Man erhält

$$\begin{array}{r} 568 \\ 7 \\ \hline 3976 \end{array}$$

7 mal 8 ist 56, nämlich 6 Einer und 5 Zehner. Man setze also bloß die 6 Einer an, und behalte die 5 Zehner im Gedächtnisse. 7 mal 6 ist 42, d. i. 42 Zehner, weil die zweite Ziffer 6 des Multiplikanden auf Zehner sich bezieht, zu diesen nehme man die

zuerst gebliebenen 5 Zehner, wodurch man 47 Zehner erhält. Nun sind aber 47 Zehner so viel als 7 Zehner und 4 Hunderter: man setze also nur 7 in die Klasse der Zehner, und behalte die 4 Hunderter im Gedächtnisse. 7 mal 5 ist 35, nämlich 35 Hunderter, weil 5 im Multiplikanden auf Hunderter sich bezieht; zu diesen addire man die gebliebenen 4 Hunderter, wodurch man 39 Hunderter erhält. Da nun keine weitere Ziffer im Multiplikanden folgt, so setze man diese 39 an, so daß 9 in die Klasse der Hunderter und 3 in die Klasse der Tausender kommt.

Es ist also 568 . 7 = 3976.

Beweis.

Da alle Theile des Multiplikanden, nämlich die Einer, Zehner, Hunderter so oft genommen worden sind, als der Multiplikator Einheiten hat, so ist die gefundene Zahl das verlangte Produkt. (§. 36. Zus.)

Zusatz. 1. Man könnte wohl auch die einzelnen Produkte aus dem Multiplikator in die Einer, Zehner u. s. f. des Multiplikanden besonders und vollständig ansetzen, wodurch das gewählte Beispiel folgende Auflösung erhielte:

$$\begin{array}{r} 568 \\ 7 \\ \hline 56 \\ 420 \\ 3500 \\ \hline 3976 \end{array}$$

Dieß ist jedoch zu weitläufig.

Zusatz. 2. Soll die Zahl 708 mit 9 multiplizirt werden, so sage man 9 mal 8 ist 72, setze 2 an und

behalte die 7 Zehner im Gedächtnisse. Nun ist ferner 9 mal 0 = 0 (§. 35. Zus. 4.), hiezu nehme man die zuerst gebliebenen 7 Zehner und setze diese 7, da 0 + 7 nicht mehr und nicht weniger als 7 ist, in die Klasse der Zehner. Endlich sage man 9 mal 7 ist 63, und setze diese, da der Multiplikand sonst keine Ziffer hat, vollständig an. Es ist also 708 . 9 = 6372.

Zusatz. 3. Wenn dem Multiplikator zur Rechten Nullen angehängt sind, so verfahre man ganz wie oben, hänge aber dem Produkte zur Rechten so viele Nullen an, als deren der Multiplikator zur Rechten hat. (§. 41. Zus.)

Z. B. 99604 . 700 = 69722800.

Eben so ist

5070 . 9 = 45630.

Zusatz. 4. Wenn beiden Faktoren zur Rechten Nullen angehängt sind, so verfahre man ganz nach der Auflösung, setze aber dem Produkte zur Rechten so viel Nullen bei, als deren beide Faktoren zusammengenommen, haben.

Z. B. 7458090 . 600 = 4474854000
40384700 . 800 = 32307760000

§. 43. Aufgabe.

Eine aus mehreren Ziffern bestehende Zahl mit einer mehrziffrigen Zahl zu multipliziren.

Auflösung.

1) Man nehme diejenige Zahl als Multiplikator an, welche aus der geringeren Anzahl Ziffern besteht. Haben die beiden Faktoren eine gleiche Anzahl Ziffern, so ist es gleichviel, welcher als Multiplikator gewählt

wird, doch nimmt man gewöhnlich den Faktor als Multiplikator an, welcher die kleineren Ziffern hat. Sollten z. B. die Zahlen 98756 und 10243 mit einander multiplizirt werden, so würde man 10243 als Multiplikator annehmen.

2) Den Multiplikator setze man so unter den Multiplikanden, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe unten einen horizontalen Strich.

3) Nun multiplizire man mit den Einern des Multiplikators alle Theile des Multiplikanden, wie §. 41 gezeigt worden ist. Eben so multiplizire man mit den Zehnern des Multiplikators alle Theile des Multiplikanden, setze aber die erste d. h. dem Lokalwerthe nach niedrigste Ziffer unter die Zehner. Auf eine ähnliche Weise verfahre man mit den Hundertern, Tausendern u. s. w. des Multiplikators, d. h. man setze die erste Ziffer, welche man durch die Multiplikation mit den Hundertern erhält, in die Klasse der Hunderter, die erste Ziffer, welche man durch die Multiplikation mit den Tausendern erhält, in die Klasse der Tausender u. s. w.

5) Kömmt an einer andern als der äussersten Stelle des Multiplikators eine 0 vor, so wird diese übergangen.

6) Hat man mit allen Theilen des Multiplikators alle Theile des Multiplikanden multiplizirt, so ziehe man einen Strich vor und addire die einzelnen Produkte, so ist ihre Summe das gesuchte Produkt.

I. Beispiel.

Es soll die Zahl 5068 mit 348 multiplizirt werden.

Auflösung.

Verfährt man nach den gegebenen Regeln, so erhält man:

```
   5068
    348
-------
  40544
 20272
15204
-------
1763664
```

Wenn nämlich 5068 mit 348 multiplizirt werden soll, so soll man 5068 348mal, d. h. 8mal, 40mal, und 300mal nehmen. Nun ist

$$5068 \cdot 8 = 40544$$
$$5068 \cdot 40 = 202720$$
$$5068 \cdot 300 = 1520400$$
$$5068 \cdot 348 = 1763664$$

II. Beispiel.

Es soll die Zahl 97064 mit 609 multiplizirt werden.

Auflösung.

Man erhält

```
   97064
     609
--------
  873576
582384     (Aufl. Nr. 5.)
--------
59111976
```

Wenn nämlich 97064 mit 609 multiplizirt werden soll, so hat man 97064 609mal, d. h. 9mal und 600mal zu nehmen.

Dieß giebt

$$97064 \cdot 9 = 873576$$
$$97064 \cdot 600 = 58238400$$
$$97064 \cdot 609 = 59111976$$

III. Beispiel.

Es soll die Zahl 79056 mit 42017 multiplizirt werden.

Auflösung.

```
     79056
     42017
    553392
    79056
  158112
 316224
3321695952
```

Zusatz. 1. 8567200 × 76000 = 651107200000 (§. 42. Zus. 4.)

Zusatz. 2. Bisweilen soll die nämliche Zahl mit mehreren anderen multiplizirt werden. In diesem Falle ist es nicht unvortheilhaft, die Vielfachen dieser Zahl bis zum Neunfachen derselben im Voraus zu bestimmen, was am Leichtesten dadurch geschieht, daß man die einfache Zahl zuerst ansetzt, sodann das Doppelte derselben darunter schreibt, hierauf zu diesem Doppelten die einfache Zahl addirt, wodurch man das Dreifache dieser Zahl erhält; hierauf wieder zum Dreifachen die einfache Zahl addirt, wodurch man das Vierfache derselben erhält u. s. w. Addirt man endlich zum gefundenen Neunfachen die einfache Zahl selbst, so erhält man diese mit einer zur Rechten angehängten Null (§. 41. Zus.), was somit einen Beweis für die Richtigkeit der vorgenommenen Additionen giebt. Es läßt sich sodann die verlangte Multiplikation ohne Schwierigkeit vornehmen. Soll z. B. 9653 mit 2689, 5876, 395, 484 und 79 multiplizirt werden, so setze man

9653	....	1 fach
19306	....	2 »
28959	....	3 »
38612	....	4 »
48265	....	5 »
57918	....	6 »
67571	....	7 »
77224	....	8 »
86877	....	9 »
96530	......	10 »

Um nun das Produkt der Zahlen 9653 und 2689 zu erhalten, setze man dieselben unter einander (§. 43. Aufl. 2.), schreibe die in der Tabelle für das Neunfache von 9650 erhaltene Zahl an, setze darunter das in der Tabelle stehende Achtfache von 9653, rücke aber um eine Ziffer von der Rechten gegen die Linke ein (Aufl. Nr. 3.) u. s. w. Auf ähnliche Weise verfahre man mit den übrigen Multiplikatoren.

Zusatz. 3. Wenn eine Zahl z. B. 35 = 7 . 5 ein Produkt aus zwei Faktoren ist und mit ihr eine andere Zahl multiplizirt werden soll, so ist es gleichviel, ob man mit jener Zahl selbst d. h. im gegebenen Falle mit 35, oder mit jedem einzelnen Faktor 7, 5 multiplizirt; z. B. 43 . 35 = 1505. Es ist aber auch 43 . 5 . 7 = 215 . 7 = 1505.

Zusatz. 4. Wenn man zwei Zahlen mit einander multiplizirt hat, hierauf aber die Faktoren verwechselt, d. h. den Multiplikator zum Multiplikanden und den Multiplikanden zum Multiplikator macht, so kann man, wenn sich das nämliche Produkt wieder ergiebt, mit

großer Wahrscheinlichkeit auf die Richtigkeit der Rechnung schließen. (§. 37.)

Anmerkung. Später wird ein zuverläßiges Kennzeichen für die Richtigkeit einer vorgenommenen Multiplikation gegeben werden.

§. 44. Aufgaben.

1) 5870342 × 2.
2) 49800472 × 3.
3) 52730598 × 40. (§. 42.) Zus. 3.)
4) 984069570 × 500. (§. 42. Zus. 4.)
5) 83398304 × 60.
6) 29930857 × 700.
7) 840091359 × 8.
8) 533990274 × 9.
9) 7453047 × 32. (§. 43.)
10) 95004326 × 47.
11) 49206853 × 436.
12) 543429901 × 908. (§. 43. Nr. 5.)
13) 472804318 × 31258.
14) 33480827 × 90407.
15) 987046295 × 3014897.
16) 150276483 × 9856007.
17) 478204000 × 94738000.
18) 52673490287 × 874009598.

D. Division.

§. 45. Erklärungen.

a) Dividiren heißt untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gleichfalls gegebenen Zahl enthalten ist.

b) Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt Dividend, die Zahl, womit man dividirt, heißt Divisor, und die Zahl, welche angiebt, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist, heißt Quotient.

c) Das Zeichen, durch welches die Division angedeutet wird, ist (:), und wird zwischen den Dividenden und Divisor so gesetzt, daß erster zur Linken, letzter zur Rechten steht. So bedeutet z. B. 12 : 4 die Zahl 12 soll durch 4 dividirt werden, d. h. man soll angeben, wie oft 4 in 12 enthalten ist. 12 : 4 wird ausgesprochen: zwölf dividirt durch 4.

Zusatz. 1. Jede Zahl ist in sich selbst einmal enthalten. Z. B. 4 : 4 = 1; 500 : 500 = 1.

Zusatz. 2. Der Divisor 1 läßt den Dividenden ungeändert; z. B. 7 : 1 = 7; 68 : 1 = 68.

Zusatz. 3. Bisweilen wird die Division bloß angedeutet; wenn z. B. 45 durch 9 dividirt werden soll, so kann man 45 : 9 setzen, ohne den Quotienten 5 besonders anzuschreiben. Gleichwohl nennt man Ausdrücke wie 45 : 9 oder 48 : 6 u. s. w. Quotienten.

Zusatz 4. Wenn der Dividend eine zusammengesetzte Größe ist, d. h. aus Theilen besteht, die durch die Zeichen der Addition und Subtraktion verbunden sind, so schließt man ihn durch Klammern ein; z. B. (5 + 7 + 12) : 6; oder (18 + 7 − 9) : 4.

Dasselbe gilt auch, wenn der Divisor zusammengesetzt ist; z. B. 48 : (4 + 8); 56 : (17 — 9). Sind Dividend und Divisor zusammengesetzte Größen, so schließt man jeden besonders ein; z. B.

(19 + 17) : (5 + 6 + 1);

(48 — 13 + 5) : (17 + 7 — 16).

Zusatz. 5. Wenn die Zahl 12 durch 4 dividirt werden soll, so darf man nur untersuchen, wie oft sich 4 von 12 wegnehmen läßt. Subtrahirt man 4 von 12, so bleibt 8; nimmt man nun von 8 wieder 4 weg, so bleibt 4; man hat also bis jetzt die Zahl 4 zweimal weggenommen. Nimmt man nun von den gebliebenen 4 wieder 4 weg, so bleibt Nichts. Es hat sich also 4 von 12 nach und nach dreimal wegnehmen lassen, folglich ist 4 in 12 dreimal enthalten, d. h. 12 : 4 = 3. Eben so kann man 3 von 6 zweimal wegnehmen, d. h. 3 ist in 6 zweimal enthalten. Es ist also 6 : 3 = 2.

Zusatz. 6. Wenn 9 durch 4 dividirt werden soll, so muß man wieder untersuchen, wie oft sich 4 von 9 wegnehmen läßt. Nimmt man 4 von 9 weg, so bleibt 5; von diesen 5 wieder 4 weggenommen, bleibt 1. Es ist also 4 von 9 zweimal weggenommen worden, und es blieb noch 1, in welchem 4 nicht mehr ganz enthalten ist. Diese zuletzt gebliebene Zahl, in welcher der Divisor nicht mehr enthalten ist, heißt der Rest. Die Division der Zahl 9 durch 4 ist daher auch nicht vollendet. Es wird aber in der Folge auf mehr als eine Weise gezeigt werden, wie sich der hier unvollendet gebliebene Quotient vervollständigen lasse.

Zusatz. 7. Der gebliebene Rest muß immer kleiner als der Divisor seyn. Sollte z. B. 11 durch 2 dividirt werden, und wollte man den Quotienten = 3 annehmen, so würde man den Rest 5 erhalten. Nun ist aber 2 in 5 noch zweimal enthalten, und es bleibt überdieß 1 als Rest; folglich ist nicht 3 der Quotient, sondern 5, abgesehen von dem zuletzt gebliebenen Reste 1, in welchem 2 nicht mehr ganz enthalten ist.

Zusatz. 8. Wenn man die in den Zusätzen 5, 6, 7 behandelten Fälle aufmerksam betrachtet, so wird man gewahr werden, daß zur Bestimmung des Quotienten das §. 40 angesetzte Einmaleins die besten Dienste leiste, und die fortgesetzte Subtraktion, die in den meisten Fällen sehr beschwerlich wäre, überflüssig mache. Soll z. B. 35 durch 5 dividirt werden, so wird man den Quotienten nicht = 8 annehmen, weil 5 mal 8 schon 40 ist, folglich 5 von 35 nicht 8mal weggenommen werden kann; man wird auch den Quotienten nicht = 6 annehmen, weil 5 mal 6 erst 30 zum Produkte giebt, 30 aber von 35 subtrahirt den Rest 5 läßt, in welchem 5 noch 1mal enthalten ist. Es ist also 35 : 5 = 7. So wird man ferner, wenn 57 durch 9 dividirt werden soll, weder 7 noch 5 als Quotienten annehmen, denn 9 . 7 ist schon 63, also kann 9 von 57 nicht 7mal weggenommen werden; 9 . 5 ist aber erst 45, und läßt von 57 subtrahirt den Rest 12, in welchem 9 noch 1mal enthalten ist. Es wird also der Quotient = 6 seyn; wiewohl im gegebenen Falle die Division unvollständig ist, und 3 als Rest bleibt.

Zusatz. 9. Bei der Division ganzer Zahlen soll

man untersuchen, wie oft sich der Divisor vom Dividenden subtrahiren läßt; nach Zus. 8 läßt sich aber diese Subtraktion durch Anwendung der pythagorischen Tafel ersparen. Die Division ist also *bei ganzen Zahlen* eine abgekürzte Subtraktion. (Vergl. §. 36. Zus.)

Zusatz. 10. Dividiren heißt bei ganzen Zahlen den Dividenden in so viele gleiche Theile theilen, als es der Divisor verlangt, und die Größe eines solchen Theils, den Quotienten, angeben. So heißt z. B. 12 : 4, man soll 12 in 4 gleiche Theile theilen und die Größe eines solchen Theils bestimmen.

Zusatz. 11. Es wird eine Summe dividirt, wenn man jeden Summanden dividirt; z. B.

$(8 + 12) : 4 = 8 : 4 + 12 : 4 = 2 + 3 = 20 : 4 = 5.$

Zusatz. 12. Es wird eine Differenz dividirt, wenn man Minuend und Subtrahend dividirt; z. B.

$(16 - 6) : 2 = 16 : 2 - 6 : 2 = 8 - 3 = 10 : 2 = 5.$

Zusatz. 13. Es wird ein Produkt dividirt, wenn man nur *einen* Faktor dividirt und den andern ungeändert läßt; z. B.

$(6 . 4) : 2 = 3 . 4 = 6 . 2 = 24 : 2 = 12.$

Eben so ist

$(8 . 4 . 6) : 2 = 4 . 4 . 6 = 8 . 2 . 6 = 8 . 4 . 3 = 96.$

§. 46. *Lehrsatz.*

Der Quotient entsteht aus dem Dividenden, wie die Einheit aus dem Divisor abgeleitet werden kann.

Beweis.

Es sey der Dividend = 12; der Divisor = 4, so daß also der Quotient = 3. So wie nun die Einheit d. h. 1 aus dem Divisor 4 dadurch abgeleitet wird, daß man denselben in 4 gleiche Theile theilt und einen solchen Theil nimmt, so wird auch der Quotient 3 dadurch erhalten, daß man den Dividenden 12 in 4 gleiche Theile theilt und einen solchen Theil nimmt.

Zusatz. 1. Der Quotient ist in dem Dividenden so oft enthalten als die Einheit im Divisor.

Zusatz. 2. Der Divisor ist so oft im Dividenden enthalten als die Einheit im Quotienten; d. h. so oft im gegebenen Beispiele 4 in 12 enthalten ist, so oft ist die Einheit im Quotienten 3 enthalten.

§. 47. Grundsätze.

1) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt gleiche Quotienten; z. B.

$$\begin{array}{r} 12 = 9 + 3 \\ 3 = 3 \\ \hline 12 : 3 = (9 + 3) : 3 \end{array}$$ (§. 11. N. 6.)

2) Gleiches mit Ungleichem, oder Ungleiches mit Gleichem dividirt, giebt ungleiche Quotienten. (§. 11. N. 7.) z. B.

$$\begin{array}{c} 12 = 12 \\ 3 < 4 \\ \hline 12 : 3 > 12 : 4 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 24 = 24 \\ 8 > 6 \\ \hline 24 : 8 < 24 : 6. \end{array}$$

$$\text{Ferner } \begin{array}{c} 15 > 9 \\ 3 = 3 \\ \hline 15 : 3 > 9 : 3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 18 < 24 \\ 6 = 6 \\ \hline 18 : 6 < 24 : 6; \end{array}$$ d. h.

bei gleichen Dividenden giebt der kleinere Divisor, und bei gleichen Divisoren der größere Dividend den größeren Quotienten, und so umgekehrt.

Ferner 24 > 20 oder 18 < 30

4 < 5   9 > 5

24 : 4 > 20 : 5   18 : 9 < 30 : 5, d. h. der Quotient wird um so größer, je größer der Dividend und je kleiner zugleich der Divisor ist, und so umgekehrt.

§. 48. Lehrsatz.

Es wird ein Quotient mit irgend einer Zahl multiplizirt.

I. Wenn man den Dividenden mit dieser Zahl multiplizirt und den Divisor ungeändert läßt, und

II. Wenn man den Dividenden ungeändert läßt, dagegen den Divisor mit der Zahl, mit welcher der Quotient multiplizirt werden soll, dividirt.

Beweis zu I.

Nimmt der Dividend z. B. um das Dreifache zu, bleibt aber der Divisor ungeändert, so nimmt auch der Quotient um das Dreifache zu, und ist also mit 3 multiplizirt (§. 47. N. 2.) So ist z. B. 18 : 9 = 2. Nimmt nun der Dividend um das Dreifache zu, bleibt aber der Divisor ungeändert, so erhält man 54 : 9 = 6. Der Quotient 6 ist aber 3 mal so groß als der erste Quotient 2, folglich der erste Quotient mit 3 multiplizirt. Es ist also (18 : 9) 3 = 54 : 9 = 6.

Beweis zu II.

Nimmt der Divisor z. B. um das Dreifache ab, bleibt aber der Dividend ungeändert, so nimmt der

Quotient um das Dreifache zu, und ist daher mit 3 multiplizirt. Es ist 18 : 9 = 2. Nimmt nun der Divisor um das Dreifache ab, bleibt aber der Dividend ungeändert, so erhält man 18 : 3 = 6. Der Quotient 6 ist aber 3 mal so groß als der erste Quotient 2, folglich ist dieser mit 3 multiplizirt. Es ist daher (18 : 9) 3 = 18 : 3 = 6.

Zusatz. Dieses letztere Verfahren läßt sich nur in dem Falle in Anwendung bringen, wenn die Zahl, mit welcher der gegebene Quotient multiplizirt werden soll, im Divisor ohne Rest enthalten ist.

§. 49. Lehrsatz.

Es wird ein Quotient mit irgend einer Zahl dividirt

I. Wenn man mit ihr den Dividenden dividirt und den Divisor ungeändert läßt, oder

II. Wenn man den Dividenden ungeändert läßt, und den Divisor mit der Zahl, mit welcher der Quotient dividirt werden soll, multiplizirt.

Beweis zu I.

Nimmt der Dividend z. B. um das Dreifache ab, bleibt aber der Divisor ungeändert, so nimmt auch der Quotient um das Dreifache ab, und ist also mit 3 dividirt. (§. 47. N. 2.) So ist z. B. 36 : 6 = 6. Nimmt nun der Dividend um das Dreifache ab, so erhält man 12 : 6 = 2, wodurch also der erste Quotient um das Dreifache abgenommen hat, folglich mit 3 dividirt ist. Es ist also (36 : 6) : 3 = 12 : 6 = 2.

Beweis zu II.

Nimmt der Divisor z. B. um das Dreifache zu,

d. h. wird derselbe mit 3 multiplizirt, so nimmt der Quotient um das Dreifache ab. Es ist z. B. 18 : 3 = 6. Nimmt nun der Divisor um das Dreifache zu, so erhält man 18 : 9 = 2; wodurch der erste Quotient 6 um das Dreifache vermindert, d. h. mit 3 dividirt ist. Es ist also (18 : 3) : 3 = 18 : 9 = 2.

Zusatz. 1. Das erste Verfahren läßt sich nur dann in Anwendung bringen, wenn die Zahl, mit welcher der Quotient dividirt werden soll, im Dividenden ohne Rest enthalten ist.

Zusatz. 2. (56 : 8) 10 = 560 : 8 (§. 41. Zus.); (720 : 9) : 10 = 72 : 9.

Zusatz. 3. Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividenden und Divisor mit der nämlichen Zahl multiplizirt oder dividirt. Multiplizirt man den Dividenden z. B. mit 3, so wird der Quotient dreimal größer, und multiplizirt man den Divisor mit 3, so wird der Quotient dreimal kleiner. Da nun der Quotient auf der einen Seite um eben so viel zunimmt, als er auf der andern abnimmt, so bleibt sein Werth ungeändert. Dividirt man aber den Dividend z. B. mit 3, so wird der Quotient dreimal kleiner, und dividirt man den Divisor mit 3, so wird der Quotient dreimal größer. Da nun der Quotient auf der einen Seite um eben so viel abnimmt, als er auf der andern zunimmt, so bleibt sein Werth ungeändert.

Zusatz. 4. Jeder Quotient läßt sich, ohne daß an seinem Werthe etwas geändert würde, auf mannichfache Weise darstellen; z. B. 12 : 6 = 24 : 12 = 6 : 3 = 4 : 2 u. s. w.

§. 50. Aufgabe.

Mit einer einziffrigen Zahl in eine größere Zahl, welche jedoch kleiner als das Zehnfache jener einziffrigen Zahl ist, zu dividiren.

Erster Fall. Wenn der Divisor im Dividenden ohne Rest enthalten ist.

Zweiter Fall. Wenn der Divisor im Dividenden nicht ohne Rest enthalten ist.

Auflösung zu 1.

In der ersten Horizontalreihe der pythagorischen Tafel (§. 40) nehme man den Divisor, und suche unter den Zahlen, die mit ihm in gleicher senkrechter Reihe stehen, den Dividenden, so ist die Zahl, welche in der ersten senkrechten Reihe mit dem Dividenden in gleicher Richtung steht, der gesuchte Quotient. Soll z. B. 24 durch 3 dividirt werden, so nehme man in der ersten Horizontalreihe den Divisor 3, gehe von dieser Zahl senkrecht herab bis zur Zahl 24, welche als Dividend gegeben ist. In gleicher Richtung mit 24 findet sich in der ersten senkrechten Reihe die Zahl 8, und diese ist der gesuchte Quotient.

Auflösung zu 2.

Man nehme in der ersten Horizontalreihe der pythagorischen Tafel den Divisor und suche unter den Zahlen, die unter ihm senkrecht stehen, diejenige auf, welche zunächst kleiner als der gegebene Dividend ist. In gleicher Richtung mit dieser Zahl steht in der ersten senkrechten Reihe der gesuchte Quotient. Soll z. B. 65 durch 9 dividirt werden, so nehme man in der ersten Horizontalreihe den Divisor 9. Unter den Zahlen, welche mit 9 in gleicher senkrechter Reihe stehen,

kömmt 63 dem Dividenden 65 am nächsten, und mit dieser Zahl steht in der ersten senkrechten Reihe 7 in gleicher Richtung. Es ist also 7 der Quotient, und 65 — 63 = 2 der gebliebene Rest.

§. 51. Aufgabe.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu dividiren.

Auflösung.

1) Man setze den Divisor zur linken Seite des Dividenden, trenne aber beide Zahlen durch irgend ein passendes Zeichen, z. B. durch eine Klammer, und ziehe zur Rechten des Dividenden einen senkrechten Strich oder ein anderes passendes Zeichen, z. B. }.

2) Man sehe, wie oft der Divisor in der höchsten Ziffer des Dividenden, d. h. in der äussersten zur Linken, oder, wenn diese kleiner ist als der Divisor, wie oft der Divisor in den beiden äussersten Ziffern zur Linken des Dividenden enthalten ist. (§. 50.) Den auf diese Weise erhaltenen ersten Theil des Quotienten setze man zur Rechten des Dividenden an.

3) Mit ihm multiplizire man den Divisor, setze das Produkt unter die bei der bereits vorgenommenen Division gebrauchten Ziffern des Dividenden und subtrahire dasselbe.

4) Dem etwa gebliebenen Reste — denn daß ein Rest bleibe, ist nach dem Bisherigen nicht nothwendig — setze man die folgende Ziffer des Dividenden bei. In die hieraus entstandene Zahl dividire man auf's Neue, und setze den gefundenen Quotienten als den zweiten Theil des zu bestimmenden Quotienten an.

Mit diesem zweiten Theile des Quotienten multiplizire man den Divisor und subtrahire das Produkt.

5) Dem gebliebenen Reste setze man nun wieder die folgende Ziffer des Dividenden bei, dividire die dadurch entstandene Zahl, und nehme den Quotienten als den dritten Theil des gesuchten Quotienten an.

6) Ist an irgend einer Stelle kein Rest geblieben, und ist die herabgesetzte folgende Ziffer des Dividenden kleiner als der Divisor, so setze man in den Quotienten eine Null, und nehme die nächstfolgende Ziffer des Dividenden herab.

7) Das bisher gezeigte Verfahren setze man so lange fort, bis alle Ziffern des Dividenden herabgenommen worden sind.

8) Die zur Rechten des Dividenden angesetzte Zahl ist der Quotient, und das, was nach Subtraktion des Produkts des letzten Theils des Quotienten in den Divisor geblieben seyn sollte, ist der Rest.

Folgende Aufgaben werden das Verfahren mehr veranschaulichen:

I. Beispiel.

Es ist 996 durch 4 zu dividiren.

Auflösung.

```
4) 996}249
   8
   --
   19
   16
   --
    36
    36
    --
    —
```

1) Man setze Divisor und Dividend nach Auflös. Nr. 1.

2) 4 ist in 9 zweimal enthalten. Man setze also 2 als den ersten Theil des Quotienten an. (Aufl. N. 2.)

3) Zweimal vier ist acht. Diese setze man unter die erste Ziffer des Dividenden und subtrahire.

4) Dem gebliebenen Reste (1) setze man die folgende Ziffer (9) des Dividenden bei, wodurch die Zahl 19 entsteht, und dividire dieselbe. 4 ist in 19 viermal enthalten. Man setze also 4 als den zweiten Theil des Quotienten an, multiplizire mit ihm den Divisor, setze das Produkt unter 19 und subtrahire. 16 von 19 bleibt 3. (Auflösung 4.)

5) Diesem Reste 3 setze man die folgende Ziffer des Dividenden (6) bei, wodurch die Zahl 36 entsteht. Man dividire. 4 ist in 36 neunmal enthalten. Man setze also 9 als den dritten Theil des Quotienten an, multiplizire mit ihm den Divisor, und setze das Produkt 36 unter 36. (Aufl. 5.)

6) Da nun keine Ziffer mehr herabzusetzen, auch kein Rest geblieben ist, so ist 249 der vollständige Quotient.

II. Beispiel.

Es soll 12453 durch 6 dividirt werden.

Aufl. 6) 12453|2075

```
            12
            ---
             45
             42
             ---
              33
              30
              ---
               3
```

1) Man verfahre nach Auflös. 1 der Aufg.

2) 6 ist in 12 zweimal enthalten. Man setze also im Quotienten 2 an. Zweimal 6 ist 12. Es bleibt also kein Rest.

3) Man setze die folgende Ziffer des Dividenden (4) herab.

4) Nun ist der Divisor 6 größer als 4. Man setze also in den Quotienten 0, und nehme die nächstfolgende Ziffer des Dividenden (5) herab. (Aufl. 6.)

5) Nach vollendeter Rechnung erhält man den Quotienten 2075 und den Rest 3. (Aufl. 7, 8.)

Zusatz. 1. Nach einiger Uebung hat man bei einem einziffrigen Divisor nicht nöthig, die jedesmaligen Produkte aus den einzelnen Theilen des Quotienten in den Divisor anzusetzen. Man subtrahire jedes dieser Produkte, ohne sie anzuschreiben, wie in der Auflösung angegeben ist, und setze den etwa gebliebenen Rest auf folgende Weise oben zur Rechten an. Es soll z. B. 94045 durch 7 dividirt werden. Man setze

```
    2323                      232
7) 94045|13435  oder  7)  94045
                          -----
                          13435
```

7 ist in 9 einmal enthalten. Man setze 1 im Quotienten an. Einmal 7 ist 7. Sieben von 9 bleibt 2. Diesen Rest setze man dem 9 oben zur Rechten an. 7 ist in 24 dreimal enthalten; man setze 3 in den Quotienten; dreimal 7 ist 21; diese von 24 subtrahirt giebt den Rest 3. Diesen setze man oben zur Rechten über 4. Sieben ist in 30 viermal enthalten u. s. w.

Zusatz. 2. Bei fortgesetzter Uebung wird man auch die oben angesetzten Reste nicht mehr anzuschreiben brauchen.

Zusatz. 3. 507260 : 80 = 50726 : 8 } §. 49.
43400 : 90 = 4340 : 9 } Zus. 3.

§. 52. Aufgabe.

Eine mehrziffrige Zahl durch eine kleinere mehrziffrige Zahl zu dividiren, wenn jedoch der Dividend kleiner als das Zehnfache des Divisors ist.

Auflösung.

1) Man verfahre nach §. 51. Aufl. 1.

2) Man sehe, wie oft die äusserste Ziffer zur Linken des Divisors in der äussersten Ziffer zur Linken des Dividenden, oder, wenn diese kleiner ist als die äusserste Ziffer des Divisors, in den beiden äussersten Ziffern des Dividenden enthalten ist, und setze den Quotienten an.

3) Mit diesem multiplizire man den ganzen Divisor, setze das Produkt unter den Dividenden und subtrahire.

4) Bleibt kein Rest, oder ist der gebliebene Rest kleiner als der Divisor (§. 45. Zus. 7), so ist der Quotient richtig bestimmt.

5) Ist aber das Produkt aus der Zahl, welche man als Quotienten angenommen hat, größer als der Dividend, so giebt dieß zu erkennen, daß der Quotient zu groß angenommen worden ist, und somit vermindert werden muß.

I. Beispiel.

Es soll 74 durch 37 dividirt werden.

Auflösung.

```
37) 74|2
    74
    --
```

1) Man befolge Aufl. 1.

2) 3 ist in 7 zweimal enthalten. Man setze also 2 als Quotienten an. (Aufl. 2.)

3) Mit 2 multiplizire man den Divisor und setze das Produkt 74 unter den Dividenden. (Aufl. 3.)

4) Da nun kein Rest bleibt, so ist der Quotient richtig bestimmt. (Aufl. 4.)

II. Beispiel.

Es soll 5048 durch 624 dividirt werden.

Auflösung.

```
624) 5048|8
     4992
     ----
       56
```

1) Man verfahre nach der Auflösung zur Aufgabe von 1 — 4.

2) Da der gebliebene Rest kleiner ist als der Divisor, so ist der Quotient richtig bestimmt. (Aufl. 4.)

III. Beispiel.

Es soll 3608 durch 746 dividirt werden.

Auflösung.

```
746) 3608|5
     3730
```

1) Man verfahre nach der Auflösung zur Aufgabe von 1 — 2.

Nun ist aber das Produkt aus dem Quotienten 5 in den Divisor größer als der Dividend. Es ist also der Quotient zu groß, und muß deßhalb vermindert werden. (Aufl. 5.)

3) Setzt man statt 5 den Quotienten 4 an, so erhält man

```
746) 3608|4
     2984
     ----
      624
```

4) Da nun der gebliebene Rest kleiner ist als der Divisor, so ist der Quotient richtig bestimmt.

Zusatz. 4580 : 458 = 10
74200 : 742 = 100.

§. 53. Aufgabe.

Eine mehrziffrige Zahl mit einer kleinern mehrziffrigen Zahl zu dividiren, wenn der Quotient größer als 10 ist.

Auflösung.

1) Man verfahre nach §. 52. Auflös. 1 — 5.

2) Dem Reste, vorausgesetzt, daß ein solcher geblieben ist, setze man die nächstfolgende Ziffer des Dividenden bei, und untersuche auf die bisher gezeigte Weise, wie oft der Divisor im Dividenden enthalten ist.

3) Ist an einer Stelle die Zahl, welche aus dem gebliebenen Reste und der ihm beigesetzten nächstfolgenden Ziffer des Dividenden entsteht, kleiner als der Divisor, so setze man im Quotienten eine Null an, und

nehme auf's Neue die nächstfolgende Ziffer des Dividenden herab.

4) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis nach und nach alle Ziffern des Dividenden herabgenommen worden sind.

I. Beispiel.

Es soll 161482 durch 614 dividirt werden.

Auflösung.

```
614) 161482|263
     1228
     ----
      3868
      3684
      ----
       1842
       1842
       ----
        —
```

1) Da die erste Ziffer des Dividenden (1) kleiner ist als die erste Ziffer des Divisors (6), so sehe man, wie oft 6 in den beiden ersten Ziffern des Dividenden enthalten ist. (§. 52. Aufl. 2.) Sechs ist in 16 zweimal enthalten. Den Quotienten 2 setze man an.

2) Mit diesem multiplizire man den ganzen Divisor, setze das Produkt 1228 unter die 4 ersten Ziffern des Dividenden und subtrahire.

3) Dem Reste 386 setze man die nächstfolgende Ziffer (8) des Dividenden bei, wodurch man 3868 erhält.

4) Nun ist 6 in 38 sechsmal enthalten. Man setze also 6 in den Quotienten.

5) Mit ihm multiplizire man den ganzen Divisor, setze das Produkt 3684 unter 3868 und subtrahire.

6) Dem Reste 184 setze man die folgende Ziffer (2) des Dividenden bei, wodurch man 1842 erhält.

7) Nun ist 6 in 18 dreimal enthalten. Man setze also 3 in den Quotienten.

8) Mit diesem multiplizire man den Divisor, und setze das Produkt unter 1842 des Dividenden.

9) Da nun keine Ziffer des Dividenden mehr vorhanden ist, die herabgenommen werden könnte, auch kein Rest geblieben ist, so ist 263 der vollständige Quotient. (Aufl. 4.)

II. Beispiel.

Es soll 340998 durch 483 dividirt werden.

Auflösung.

```
483) 340998|706
     3381
     ----
       2898
       2898
       ----
        —
```

1) Vier ist zwar in 34 achtmal enthalten. Wollte man aber 8 als Quotienten annehmen, so wäre das Produkt aus 8 in den Divisor 483 die Zahl 3864, welche von den 4 ersten Ziffern des Dividenden nicht subtrahirt werden könnte. Es wäre also der Quotient zu groß angenommen. (§. 52. Aufl. 5.) Man nehme daher als den ersten Theil des Quotienten 7 an, subtrahire das Produkt aus 7 in den Divisor von 3409, und setze dem Reste 28 die folgende Ziffer des Dividenden bei.

2) Nun ist die dadurch entstandene Zahl 289 kleiner als der Divisor. Man setze also in den Quotien-

ten eine Null, und nehme die folgende Ziffer des Dividenden herab. (Aufg. Aufl. 3.)

3) Durch fortgesetzte Rechnung findet man den Quotienten 706.

III. Beispiel.

Es soll 12213097 durch 3047 dividirt werden.

Auflösung.

```
3047) 12213097|4008
      12188
        25097
        24376
          721
```

1) Drei ist in 12 viermal enthalten. Man setze 4 in den Quotienten, multiplizire damit den Divisor, setze das Produkt unter die 5 ersten Ziffern des Dividenden, subtrahire und setze dem Reste die folgende Ziffer des Dividenden bei.

2) Die dadurch entstandene Zahl 250 ist kleiner als der Divisor. Man setze also eine Null in den Quotienten, und nehme die folgende Ziffer des Dividenden herab.

3) Die dadurch entstandene Zahl 2509 ist aber wieder kleiner als der Divisor. Man setze also aufs Neue eine Null in den Quotienten, und nehme die folgende Ziffer des Dividenden herab.

4) Man erhält durch fortgesetzte Rechnung den Quotienten 4008, und es bleibt 721 als Rest.

IV. Beispiel.

Es soll 19464904 durch 973 dividirt werden.

Auflösung.

```
973) 19464904|20005
     1946
       4904
       4865
         39
```

V. Beispiel.

Es soll 608259341 durch 8629 dividirt werden.

Auflösung.

```
8629) 608259341|70490
      60403
       42293
       34516
        77774
        77661
         1131
```

Die weitere Erklärung dieser letzten Beispiele kann sich nun der Schüler selbst geben.

Zusatz. 1. Wenn der Dividend im Verhältnisse zum Divisor sehr groß ist, und besonders wenn mehrere Zahlen durch die nämliche Zahl dividirt werden sollen, ist es vortheilhaft, die Vielfachen des Divisors bis zum Neunfachen in eine Tabelle zu setzen, wie dieß §. 43. Zus. 2. gezeigt worden ist. Man erkennt durch eine solche Tabelle den jedesmaligen Quotienten, und erspart das Multipliziren des Divisors mit jedem Theile des Quotienten, weil diese Produkte bereits in der Tabelle stehen.

Es soll z. B. 4220746897 durch 894 dividirt werden.

Auflösung.

Man bestimme die Vielfachen des Divisors.

894	einfach;
1788	zweifach
2682	dreifach
3576	vierfach
4470	fünffach
5364	sechsfach
6258	siebenfach
7152	achtfach
8046	neunfach

```
894) 4220746897|4721193
     3576
     ----
      6447
      6258
      ----
       1894
       1788
       ----
        1066
         894
        ----
         1798
          894
         ----
          8349
          8046
          ----
           3037
           2682
           ----
            355
```

Man ersieht, daß der erste Theil des Quotienten nicht 5 seyn kann, weil, wie man aus der Tabelle erkennt, das Fünffache des Divisors größer ist als die vier ersten Ziffern des Dividenden; man nehme also 4 als ersten Theil des Quotienten, setze das Vierfache des Divisors unter die 4 ersten Ziffern des Dividenden, subtrahire und setze die folgende Ziffer des Dividenden herab, wodurch die Zahl 6447 entsteht. Als die nächstkleinere Zahl findet man in der Tabelle das Siebenfache des Divisors; man setze also 7 als zweiten Theil des Quotienten an, u. s. w.

Zusatz. 2. Wenn der Divisor in zwei Faktoren zerlegt werden kann, so ist es gleichviel, ob man mit dem Divisor selbst oder mit jedem einzelnen Faktor dividirt; z. B.

$$34692 : 49 = 34692 : 7 . 7 = 4956 : 7 = 708.$$

Zusatz. 3. Bei der Multiplikation sind zwei Faktoren gegeben, und man sucht das Produkt. (§. 35.) Bei der Division aber läßt sich der Dividend als ein gegebenes Produkt, der Divisor als ein gegebener Faktor betrachten, und man sucht den andern Faktor, welcher Quotient heißt. Soll z. B. 12 durch 4 dividirt werden, so kann man 12 als ein Produkt und 4 als den einen Faktor desselben betrachten. Der andere Faktor, der gefunden werden soll, heißt 3. So heißt aber auch der Quotient. (Vergleiche §. 50.)

Multiplikation und Division sind einander entgegengesetzt.

Zusatz. 4. Es ist bei der Multiplikation gezeigt worden (§. 36.), daß das Produkt eben so aus dem einen Faktor entsteht, wie der andere aus der Einheit entstanden ist. Nimmt man z. B. im Produkte 4 . 3 = 12 den Faktor 3 als Multiplikator, so ist in ihm die Einheit dreimal enthalten; eben so oft ist aber auch der Faktor 4 im Produkte 12 enthalten. Wird also das Produkt 12 durch den Faktor 4 dividirt, so erhält man den andern Faktor 3 zum Quotienten; wird aber das Produkt 12 durch den Faktor 3 dividirt, so erhält man den andern Faktor 4 zum Quotienten. Auf diese Weise hat man durch die Division ein Mittel, sich von der Richtigkeit einer vorgenommenen Division zu überzeugen. Dividirt man nämlich das Produkt mit dem einen Faktor, so erhält man den andern zum Quotienten. Die Division ist also die Probe für die Multiplikation.

Zusatz. 5. Da der Divisor so oft im Dividenden enthalten ist als die Einheit im Quotienten (§. 46.),

so wird man durch Multiplikation des Divisors mit dem Quotienten den Dividenden wieder erhalten. Ist z. B. der Dividend = 30; der Divisor = 5, also der Quotient = 6, so darf man nur 5 mit 6 multipliziren, um wieder zum Dividenden 30 zu gelangen. Es ist hier vorausgesetzt worden, daß der Divisor im Dividenden vollständig enthalten ist, also kein Rest bleibt. Sollte aber bei der Division ein Rest geblieben seyn, so müßte man diesen, um den Dividenden wieder zu erlangen, zum Produkte aus dem Quotienten in den Divisor addiren. So ist z. B. 6 in 45 siebenmal enthalten, und es bleibt der Rest 3. Multiplizirt man nun den Divisor mit dem Quotienten 7 und addirt zum Produkte den gebliebenen Rest, so erhält man den Dividenden; d. i. 6 . 7 + 3 = 42 + 3 = 45. Die Multiplikation ist also die Probe für die Division.

§. 54. Aufgaben.

1) 725804 : 2. (§. 45 c und §. 51. Zus. 1.)
2) 50379681 : 3.
3) 7490046828 : 4.
4) 567293345 : 5.
5) 403268347 : 6 (§. 51. Aufl. 8.)
6) 7425934070 : 70. (§. 51. Zus. 3.
7) 9045270635 : 8.
8) 5276340584 : 9.
9) 135935 : 31. (§. 53.)
10) 1057357357 : 23. (§. 53. Aufl. 3.)
11) 1935496 : 46.
12) 540180368 : 728. (§. 53. III. Beisp.)

13) 2735005326 : 6508.

14) 7602358832 : 9807.

15) 389562860351 : 98423. (§. 53. V. Beisp.)

16) Folgende Zahlen: 59249703, 895356004, 680469721, 303452974, 800056347 sollen sämmtlich durch 99478 dividirt werden. (§. 53. Zus. 1.)

Anmerkung. Ueber alle diese Aufgaben ist die Probe zu machen.

Dritter Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

---

§. 55. Erklärungen.

a) Wenn eine Zahl, die größer ist als 1, eine andere Zahl ohne Rest theilt, so daß also der Quotient eine ganze Zahl ist, so heißt die erste Zahl ein Maaß der zweiten, und die zweite Zahl heißt durch die erste theilbar. Da z. B. 9 in 72 ohne Rest enthalten ist, so heißt 9 ein Maaß von 72, und 72 ist durch 9 theilbar.

b) Wenn eine Zahl, die größer als 1 ist, zwei oder mehrere Zahlen ohne Rest theilt, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maaß dieser Zahlen.

§. 56. Erklärungen.

a) Eine Zahl, welche sich durch irgend eine kleinere Zahl, die größer als 1 ist, ohne Rest theilen läßt, heißt eine zusammengesetzte Zahl. So sind z. B. die Zahlen 4, 6, 8, 9, 10 u. s. w. zusammengesetzte Zahlen, weil sich jede derselben durch eine kleinere Zahl ohne Rest theilen läßt.

b) Eine Zahl, welche sich durch keine andere Zahl als durch sich selbst und die Einheit ohne Rest theilen läßt, heißt eine absolute Primzahl oder eine einfache Zahl. So sind z. B. die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. absolute Primzahlen.

Zusatz. 1. Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich wenigstens in 2 Faktoren zerlegen; z. B. $15 = 5 . 3$; $35 = 7 . 5$; $36 = 12 . 3 = 4 . 3 . 3 = 2 . 2 . 3 . 3$. Sind die Faktoren absolute Primzahlen, so heißen sie einfache Faktoren.

Zusatz. 2. Wenn eine Zahl ein Maaß hat, so ist dasselbe auch im Vielfachen dieser Zahl ohne Rest enthalten. Da z. B. 6 ein Maaß ist für 12, so ist 6 auch in $12 . 2 = 24$ u. s. w. ohne Rest enthalten. Da ferner 36 in 36 ohne Rest enthalten ist (§. 45. Zus. 1.), so ist 36 auch in $36 . 2$ ohne Rest enthalten.

§. 57. Erklärungen.

a) Zwei oder mehrere Zahlen, welche ein gemeinschaftliches Maaß haben, heißen zusammengesetzte Zahlen unter sich. So sind z. B. 18, 24, 42 zusammengesetzte Zahlen unter sich, weil sie das gemeinschaftliche Maaß 6 haben.

b) Zwei oder mehrere Zahlen, welche kein gemeinschaftliches Maaß haben, heißen Primzahlen unter sich oder relative Primzahlen; z. B. 25 u. 36.

Zusatz. 1. Wenn zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß haben, so ist dieses auch in der Summe und in der Differenz derselben ohne Rest enthalten. So haben z. B. 35 und 21 das gemeinschaftliche Maaß 7; es sind aber auch die Quotienten $(35 + 21)$

$:7 = 5 + 3 = 8$ und $(35 - 21) : 7 = 5 - 3 = 2$ ganze Zahlen. (§. 45. Zus. 11 u. 12.)

Zusatz. 2. Absolute Primzahlen sind auch Primzahlen unter sich.

Zusatz. 3. Zwei Zahlen, welche nur um 1 verschieden sind, sind Primzahlen unter sich.

Zusatz. 4. Wenn die eine von 2 Zahlen eine absolute Primzahl ist, so sind sie auch Primzahlen unter sich, wenn nicht die eine ein Vielfaches der andern ist, z. B. 7 und 24 sind Primzahlen unter sich; die Zahlen 7 und 21 sind zusammengesetzte Zahlen unter sich, weil 21 ein Vielfaches von 7 ist.

§. 58. Erklärung.

Eine Zahl, welche zwei oder mehrere zusammengesetzte Zahlen so theilt, daß die Quotienten Primzahlen unter sich sind, heißt das größte gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen. So ist z. B. 8 für die Zahlen 16 und 24 das größte gemeinschaftliche Maaß, denn die Quotienten 2 und 3 sind Primzahlen unter sich.

§. 59. Erklärungen.

a) Eine Zahl heißt gerade, wenn sie sich durch 2 ohne Rest theilen läßt; z. B. 2, 4, 6, 8 u. s. w.

b) Eine Zahl heißt ungerade, wenn sie sich durch 2 nicht ohne Rest theilen läßt; z. B. 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w.

§. 60. Lehrsatz.

Wenn zwei Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß haben, so läßt sich das Produkt aus dem Quotienten

in das gebrauchte Maaß durch jene Zahlen selbst ohne Rest theilen.

Beweis.

Es seien z. B. die Zahlen 36 und 24 gegeben, welche das gemeinschaftliche Maaß 12 haben, so daß man die Quotienten 3 und 2 erhält.

Es ist 36 = 12 . 3 (§. 53. Zus. 4.) also auch

36 . 2 = 12 . 3 . 2

Nun ist 36 . 2 durch 36 theilbar (§. 56. Zus. 2.), also ist auch 12 . 3 . 2 d. h. das Produkt aus den Quotienten 3 u. 2 in das gebrauchte Maaß 12 durch 36 theilbar.

Eben so ist

24 = 12 . 2, also auch

24 . 3 = 12 . 2 . 3.

Nun ist 24 . 3 durch 24 theilbar, also ist auch 12 . 2 . 3 durch 24 theilbar.

Zusatz. Wenn überhaupt mehrere Zahlen ein gemeinschaftliches Maaß haben, so läßt sich durch jede derselben das Produkt aus den erhaltenen Quotienten in das gebrauchte Maaß ohne Rest theilen.

§. 61. Lehrsatz.

Wenn eine kleinere Zahl in einer größern nicht ohne Rest enthalten ist, Divisor aber und Dividend ein gemeinschaftliches Maaß haben, so ist durch dieses auch der Rest theilbar.

Beweis.

Es sey der Dividend z. B. = 48 und der Divisor = 28, so ist der Quotient = 1 und der gebliebene Rest = 20. Die Zahlen 48 und 28 haben das

gemeinschaftliche Maaß 4, durch welches aber auch der Rest 20 theilbar seyn wird. Es ist nämlich

$48 = 1 . 28 + 20$ (§. 53. Zus. 5); also

$48 : 4 = (28 + 20) : 4$. (§. 47.)

Da nun $48:4$ nach der Voraussetzung eine ganze Zahl ist, so ist auch $(28+20):4$ eine ganze Zahl. Nun ist aber, gleichfalls nach der Voraussetzung, $28:4$ eine ganze Zahl, folglich ist auch $20:4$ eine ganze Zahl, weil nur in diesem Falle $(28+20):4 = 28:4+20:4$ (§. 45. Zus. 11.) eine ganze Zahl seyn kann.

Zusatz. Wenn eine kleinere Zahl in einer größern nicht ohne Rest enthalten ist, so kann das gemeinschaftliche Maaß dieser Zahlen nicht größer als dieser Rest seyn. Denn nach dem Lehrsatze ist das gemeinschaftliche Maaß des Dividenden und Divisors auch ein Maaß für den Rest. Sollten nun Dividend und Divisor ein größeres Maaß als diesen Rest haben, so müßte eine größere Zahl in einer kleinern ohne Rest enthalten seyn, und dieß ist ein Widerspruch.

§. 62. Lehrsatz.

Wenn eine kleinere Zahl in einer größern nicht ohne Rest enthalten ist, dieser Rest aber und der Divisor ein gemeinschaftliches Maaß haben, so ist durch dasselbe auch der Dividend theilbar.

Beweis.

Es sei z. B. der Dividend = 48, der Divisor = 28, also der Quotient = 1 und der gebliebene Rest = 20. Der Divisor und Rest haben das ge-

meinschaftliche Maaß 4, durch welches auch der Dividend theilbar seyn wird.

Es ist nämlich

$$48 = 1 . 28 + 20, \text{ also}$$
$$48 : 4 = (28 + 20) : 4.$$

Nun sind die Quotienten 28 : 4 und 20 : 4, der Voraussetzung gemäß, ganze Zahlen, also ist auch (28 + 20) : 4 eine ganze Zahl. Da nun aber 48 : 4 = (28 + 20) : 4, so ist auch 48 : 4 eine ganze Zahl.

Zusatz. Wenn eine kleinere Zahl in einer größern nicht ohne Rest enthalten ist, dieser Rest aber ein Maaß für den Divisor ist, so ist er das größte gemeinschaftliche Maaß für Dividend und Divisor. (§. 61. Zus.)

§. 63. Aufgabe.

Für zwei gegebene Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden.

Auflösung.

1) Man dividire mit der kleinern in die größere. Ist die kleinere in der größern ohne Rest enthalten, so ist sie das größte gemeinschaftliche Maaß.

2) Ist der Divisor im Dividenden nicht ohne Rest enthalten, so untersuche man, ob nicht der Divisor durch den gebliebenen Rest theilbar ist. Ist dieß der Fall, so ist der Rest das größte gemeinschaftliche Maaß. (§. 62. Zus.)

3) Bleibt aber wieder ein Rest, so dividire man mit diesem in den unmittelbar vorhergehenden Divisor (Nr. 2), und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man einen Rest erhält, durch den der unmittelbar vorhergehende Divisor theilbar ist. Dieser Rest ist das

größte gemeinschaftliche Maaß für die beiden gegebenen Zahlen.

4) Erhält man durch fortgesetzte Division den Rest 1, so giebt dieß zu erkennen, daß die gegebenen Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben, sondern Primzahlen unter sich sind.

I. Beispiel.

Man soll für die Zahlen 51 und 34 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

Auflösung.

```
34) 51|1
    34
    ——
    17|34|2
       34
       ——
       —
```

Es ist also 17 das größte gemeinschaftliche Maaß. (§. 62. Zus.)

II. Beispiel.

Man soll für die Zahlen 133 und 95 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

Auflösung.

```
95) 133|1
     95
    ———
     38|95|2
        76
        ——
        19|38|2
           38
           ——
           —
```

Es ist also 19 das größte gemeinschaftliche Maaß. Da nämlich 19 in 38 ohne Rest enthalten ist, so ist 19 das größte gemeinschaftliche Maaß für 38 und 95

(§. 62. Zus.), und da 19 in 38 und 95 ohne Rest enthalten ist, so ist es auch in 133 ohne Rest enthalten. (§. 62.) Der zuletzt gebliebene Rest ist also ein gemeinschaftliches Maaß für die beiden gegebenen Zahlen, und zwar das größte.

III. Beispiel.

Man soll für die Zahlen 5256 und 3151 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

Auflösung.

```
3151) 5256|1
      3151
      ----
      2105|3151|1
           2105
           ----
           1046|2105|2
                2092
                ----
                  13|1046|80
                     104
                     ---
                       6) 13|2
                          12
                          --
                           1
```

Die Zahlen 5256 und 3151 haben also kein gemeinschaftliches Maaß. (Aufl. Nr. 4)

§. 64. Aufgaben.

1) Man soll für die Zahlen 5733 und 3276 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

2) Man soll für die Zahlen 62321 und 9541 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

3) Man soll für die Zahlen 35683 und 3748 das größte gemeinschaftliche Maaß finden.

Anmerkung.

Aus folgenden Merkmalen läßt sich ersehen, ob eine Zahl durch eine der ersten 10 Zahlen ohne Rest getheilt werden könne:

1) Jede Zahl, deren Endziffer 2, 4, 6, 8 oder 0 ist, läßt sich durch 2 ohne Rest theilen; z. B. 508, 712, 3476, 4570.

2) Eine gegebene Zahl läßt sich durch 3 ohne Rest theilen, wenn sich die Summe der einzelnen Ziffern, also abgesehen von ihrem Lokalwerthe, durch 3 ohne Rest theilen läßt; z. B. 417 läßt sich durch 3 ohne Rest theilen, weil sich die Summe der einzelnen Ziffern $4 + 1 + 7 = 12$ durch 3 (ohne Rest) theilen läßt. So ist auch 74304 durch 3 theilbar. Die Zahl 9574, deren Summe der einzelnen Ziffern = 25 ist, läßt sich durch 3 nicht ohne Rest theilen.

3) Eine gegebene Zahl läßt sich ohne Rest durch 4 theilen, wenn sich die beiden äussersten Ziffern zur Rechten mit Beibehaltung ihres Lokalwerths durch 4 ohne Rest theilen lassen. So läßt sich z. B. die Zahl 5028 durch 4 ohne Rest theilen, weil die Zahl, welche die beiden äußersten Ziffern zur Rechten bilden, nämlich 28, durch 4 ohne Rest getheilt werden kann. Eben so läßt sich die Zahl 502304 durch 4 ohne Rest theilen. Die Zahl 74042 läßt sich durch 4 nicht ohne Rest theilen, weil 42 durch 4 nicht ohne Rest getheilt werden kann.

4) Eine gegebene Zahl läßt sich ohne Rest durch 5 theilen, wenn ihre Endziffer 5 oder 0 ist.

5) Eine gegebene Zahl läßt sich ohne Rest durch 6 theilen, wenn sie gerade ist (§. 59), und sich die

Summe der einzelnen Ziffern ohne Rest durch 3 theilen läßt. (Nr. 2.) So kann z. B. die Zahl 7758 durch 6 ohne Rest getheilt werden.

6) Für die Theilung mit der Zahl 7 giebt es kein Kennzeichen, welches sich leicht in Anwendung bringen ließe.

7) Eine gegebene Zahl läßt sich ohne Rest theilen durch 8, wenn sich die Zahl, welche die 3 äussersten Ziffern zur Rechten mit Beibehaltung ihres Lokalwerths bilden, durch 8 ohne Rest theilen läßt. Es läßt sich z. B. die Zahl 106424 durch 8 ohne Rest theilen, weil 424 durch 8 ohne Rest getheilt werden kann. Eben so läßt sich die Zahl 57462032 durch 8 ohne Rest theilen. Die Zahl 74684 läßt sich durch 8 nicht ohne Rest theilen, weil 684 durch 8 nicht theilbar ist.

8) Eine gegebene Zahl läßt sich durch 9 ohne Rest theilen, wenn sich die Summe der einzelnen Ziffern durch 9 ohne Rest theilen läßt. Die Zahl 5013261 läßt sich durch 9 ohne Rest theilen; eben so die Zahl 111111111, u. s. w. Die Zahl 4725692 ist durch 9 nicht theilbar, weil die Summe der einzelnen Ziffern, nämlich 35 durch 9 nicht ohne Rest getheilt werden kann.

9) Eine gegebene Zahl läßt sich durch 10 ohne Rest theilen, wenn ihre äusserste Ziffer zur Rechten eine Null ist; z. B. 3560 : 10 = 356.

Vierter Abschnitt.

Von den unbenannten gebrochenen Zahlen oder den Brüchen.

I. Von den Brüchen überhaupt.

§. 65. Erklärungen.

a) Wenn man ein Ganzes in eine beliebige Anzahl gleiche Theile theilt, und von diesen gleichen Theilen einen oder mehrere nimmt, so heißen die genommenen Theile in Vergleichung mit dem Ganzen eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. (§. 13. b.)

b) Zur Bezeichnung eines Bruchs sind zwei Ziffern erforderlich, wovon die eine der Nenner, die andere der Zähler des Bruchs heißt, und welche durch einen Querstrich so von einander getrennt werden, daß der Zähler über und der Nenner unter den Strich kommt. Der Nenner eines Bruchs spricht aus, in wie viele gleiche Theile ein Ganzes getheilt worden ist; der Zähler des Bruchs giebt an, wie viele von diesen gleichen Theilen genommen worden sind. Wird ein Ganzes z. B. in vier gleiche Theile getheilt, so ist jeder Theil

ein Viertel, d. i. $\frac{1}{4}$, und werden nun 3 solche Theile genommen, so erhält man drei Viertel, d. i. $\frac{3}{4}$. In diesem Bruche ist also 4 der Nenner, 3 der Zähler.

§. 66. Erklärungen.

a) Ein Bruch heißt ächt, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner. Z. B. $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$ sind ächte Brüche.

b) Ein Bruch heißt unächt, wenn der Zähler größer ist als der Nenner. Z. B. $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$ sind unächte Brüche.

Zusatz. 1. Ein ächter Bruch ist kleiner als das Ganze. So ist z. B. $\frac{3}{4} < 1$, weil der Bruch $\frac{3}{4}$ nur drei solche Theile (nämlich Viertel) in sich enthält, deren vier auf das Ganze gehen. Dagegen ist ein unächter Bruch größer als das Ganze. So ist z. B. $\frac{3}{2} > 1$, weil der unächte Bruch $\frac{3}{2}$ drei solche Theile enthält, wovon schon zwei das Ganze ausmachen.

Zusatz. 2. Sind Zähler und Nenner eines Bruchs einander gleich, so ist sein Werth = 1. (§. 11. N. 2.)
Z. B. $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{3}{3} = 1$ u. s. w.

Zusatz. 3. Folgende Brüche $\frac{9}{3}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{20}{5}$ u. s. w., in welchen der Nenner im Zähler ohne Rest enthalten ist, haben zwar die Form der unächten Brüche, lassen sich jedoch sogleich als ganze Zahlen darstellen, denn $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{20}{5} = 4$ u. s. w. Unächte Brüche dieser Art kann man auch uneigentliche Brüche nennen.

Zusatz. 4. Jede ganze Zahl kann man daher in der Form eines Bruches darstellen, z. B. $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$.

§. 67. Erklärung.

Ein Ausdruck, der ausser Ganzen auch noch Theile desselben enthält, heißt eine **gemischte Zahl**; z. B. $3\frac{2}{5}$, $8\frac{4}{7}$ u. s. f.

Zusatz. 1. Jede gemischte Zahl läßt sich in der Form eines unächten Bruchs darstellen. Man multiplizire nämlich die Ganzen mit dem Nenner des Bruchs, addire zum Produkte den Zähler des Bruchs und setze den Nenner unter die Summe.

So ist z. B. $3\frac{4}{5} = \frac{15 + 4}{5} = \frac{19}{5}$.

Zusatz. 2. Jeder unächte Bruch läßt sich in der Form einer gemischten Zahl darstellen. Man dividire mit dem Nenner in den Zähler, setze den Quotienten als eine ganze Zahl an und füge ihr einen Bruch bei, welcher den gebliebenen Rest zum Zähler und den Nenner des gegebenen Bruchs zum Nenner hat; z. B. $\frac{37}{8} = 4\frac{5}{8}$. Ist der Nenner des Bruchs im Zähler ohne Rest enthalten, so gehört der gegebene unächte Bruch zu den uneigentlichen; z. B. $\frac{48}{6} = 8$. (§. 66. Zus. 3.)

§. 68. Lehrsatz.

Jeder Bruch läßt sich als ein Quotient betrachten, welcher den Zähler des Bruchs zum Dividenden, und den Nenner des Bruchs zum Divisor hat.

Beweis.

Ist z. B. der Bruch $\frac{1}{4}$ gegeben, so ist $\frac{1}{4} = 1 : 4$; denn $1 : 4$ heißt, man soll 1 in vier gleiche Theile theilen; geschieht dieß aber, so ist jeder Theil $= \frac{1}{4}$ (§. 65. b.) Eben so ist $\frac{5}{6} = 5 : 6$; denn $\frac{1}{6} = 1 : 6$; da nun aber

5 solche Einheiten zu theilen sind, so ist $5:6 = (1:6) + (1:6) + (1:6) + (1:6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Eben so folgt, daß $\frac{5}{8} = 5:8$; $\frac{7}{11} = 7:11$ u. s. w.

Zusatz. 1. So wie sich jeder Bruch als ein Quotient darstellen läßt, eben so läßt sich jeder Quotient als ein Bruch darstellen, wenn man den Dividenden zum Zähler und den Divisor zum Nenner macht. So ist z. B. $5:12 = \frac{5}{12}$; $19:4 = \frac{19}{4}$ u. s. w. Ueberhaupt, wenn man die Division einer ganzen Zahl durch eine andere nicht vollziehen, sondern bloß andeuten will, und insbesondere wenn der Divisor größer ist als der Dividend, so giebt man dem Quotienten in der Regel die Form eines Bruchs.

Zusatz. 2. Ist bei der Division mit ganzen Zahlen der Divisor im Dividenden nicht ohne Rest enthalten, so ist aus Zusatz 1 zu ersehen, wie man in diesem Falle verfahren könne. Soll z. B. 724 mit 33 dividirt werden, so erhält man $724:33 = \frac{724}{33} = 21\frac{31}{33}$. (§. 45. Zus. 6.)

§. 69. Lehrsätze.

1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplizirt, wenn man entweder den Zähler des Bruchs mit dieser Zahl multiplizirt und den Nenner ungeändert läßt; oder, wenn man den Zähler des Bruchs ungeändert läßt, den Nenner aber mit der Zahl, mit welcher der Bruch multiplizirt werden soll, dividirt.

2) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder den Zähler mit derselben dividirt, und den Nenner ungeändert läßt, oder, wenn man

den Zähler ungeändert läßt, und den Nenner des Bruchs mit jener Zahl multiplizirt.

Beweis.

Betrachtet man die Brüche als Quotienten (§. 68), so folgt die Richtigkeit der beiden Sätze aus §. §. 48 und 49.

Beispiele.

1) $\frac{5}{6} . 2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.
2) $\frac{3}{8} . 4 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.
3) $\frac{4}{7} : 2 = \frac{2}{7} = \frac{4}{14}$.
4) $\frac{9}{5} : 3 = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

Zusatz. 1. Ist die Zahl, mit welcher ein Bruch multiplizirt werden soll, im Nenner desselben ohne Rest enthalten, so ist es das Einfachste, den Zähler des Bruchs ungeändert zu lassen und den Nenner zu dividiren; z. B. $\frac{5}{16} . 4 = \frac{5}{4}$. Ist aber die Zahl, mit welcher ein Bruch multiplizirt werden soll, im Nenner desselben nicht ohne Rest enthalten, so bleibt nichts übrig, als den Zähler zu multipliziren und den Nenner ungeändert zu lassen; z. B. $\frac{4}{7} . 5 = \frac{20}{7}$. (§. 48. Zus.)

Zusatz. 2. Ist die Zahl, mit welcher ein Bruch dividirt werden soll, im Zähler desselben ohne Rest enthalten, so dividire man diesen und lasse den Nenner ungeändert; z. B. $\frac{8}{15} : 2 = \frac{4}{15}$. Ist aber die Zahl, mit welcher ein Bruch dividirt werden soll, im Zähler nicht ohne Rest enthalten, so lasse man den Zähler ungeändert und multiplizire den Nenner. (§. 49. Zus. 1.)

Zusatz. 3. Die Größe eines Bruchs hängt bei gleichen Nennern von der Größe des Zählers; bei gleichen Zählern von der Größe des Nenners ab. Im

ersten Falle ist derjenige Bruch der größere, welcher den kleinern Nenner hat.

Zusatz. 4. Je größer der Zähler und je kleiner der Nenner ist, desto größer ist der Werth des Bruchs, und so umgekehrt.

Zusatz. 5. Der Werth eines Bruchs bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplizirt oder auch dividirt. (§. 49. Zus. 3.) Denn wird der Zähler eines Bruchs z. B. mit 3 multiplizirt, so wird dadurch der Werth des Bruchs dreimal größer. Wird nun aber auch der Nenner des Bruchs mit 3 multiplizirt, so wird dadurch der Werth des Bruchs wieder dreimal kleiner, und es behält daher der Bruch seinen ersten Werth, und so umgekehrt, z. B.

1) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ u. s. f.

2) $\frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Zusatz. 6. Jeder Bruch, so wie auch jede ganze Zahl läßt sich mit Beibehaltung des nämlichen Werths auf mannichfache Weise darstellen, z. B.

1) $\frac{8}{9} = \frac{16}{18} = \frac{24}{27}$ u. s. f.

2) $7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{28}{4}$ u. s. f. (§. 49. Zus. 4.)

Zusatz. 7. Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multiplizirt, so erhält man als Produkt den Zähler; z. B. $\frac{3}{4} . 4 = \frac{3}{1} = 3$; $\frac{4}{5} . 5 = 4$. Wird also statt eines Bruchs bloß der Zähler angesetzt, so ist derselbe mit der Zahl multiplizirt worden, welche seinem Nenner gleich ist.

Zusatz. 8. Wenn man einen Bruch mit seinem Nenner multiplizirt und das Produkt durch den Zähler

dividirt, so erhält man 1 zum Quotienten; z. B. $\frac{5}{6}.6 = 5$; $5:5 = 1$; ferner $\frac{9}{7}.7 = 9$; $9:9 = 1$.

Zusatz. 9. Soll eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl multiplizirt werden, so verwandle man erste in einen unächten Bruch; z. B. $4\frac{7}{8}.9 = \frac{39}{8}.9 = \frac{351}{8} = 43\frac{7}{8}$; oder man multiplizire den Bruch, der in der gemischten Zahl vorkommt, mit der ganzen Zahl, mit welcher die gemischte Zahl multiplizirt werden soll, setze das Produkt, wenn es ein ächter Bruch ist, an, multiplizire hierauf auch die ganze Zahl mit dem gegebenen Multiplikator und schreibe das Produkt zur Linken; z. B. $3\frac{2}{7}.2 = 6\frac{4}{7}$. Ist aber das Produkt aus dem Multiplikator in den Bruch, der in der gemischten Zahl vorkommt, ein unächter Bruch, so verwandle man denselben in eine gemischte Zahl, und nehme die darin liegenden Ganzen zu dem Produkte aus dem gegebenen Multiplikator in die Ganzen der gegebenen gemischten Zahl. Soll z. B. $14\frac{5}{8}$ mit 7 multiplizirt werden, so nehme man zuerst $\frac{5}{8}.7 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$, setze diese $\frac{3}{8}$ an und nehme die 4 Ganzen zu dem Produkte aus $14.7 = 98$. Es ist also $14\frac{5}{8}.7 = 98 + \frac{35}{8} = 98 + 4\frac{3}{8} = 102\frac{3}{8}$. So ist ferner $13\frac{4}{7}.7 = 91 + \frac{28}{7} = 91 + 4 = 95$.

Zusatz. 10. Soll eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl dividirt werden, so verwandle man erste in einen unächten Bruch, z. B. $13\frac{2}{3}:5 = \frac{41}{3}:5 = \frac{41}{15}$. Eben so ist $4\frac{5}{7}:6 = \frac{33}{7}:6 = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}$. Ist die ganze Zahl, mit welcher dividirt werden soll, kleiner als die gegebene gemischte Zahl, so kann man auch folgendes Verfahren beobachten: Man dividire zuerst die Ganzen. Ist in diesen der Divisor ohne Rest enthalten,

so dividire man nun auch den Bruch, und setze den zweiten Quotienten zur Rechten des ersten; z. B. $4\frac{3}{8} : 2 = 2\frac{3}{16}$. Ist aber der Divisor in den Ganzen nicht ohne Rest enthalten, so setze man den Quotienten an, löse den Rest in die Theile auf, welche der Nenner des in der gegebenen gemischten Zahl enthaltenen Bruchs angiebt, addire zu diesen den Zähler des Bruchs, dividire den so entstandenen unächten Bruch mit dem gegebenen Divisor und setze diesen zweiten Quotienten dem ersten zur Rechten bei, z. B.

$$37\frac{5}{8} : 4 = 9 + \frac{13}{8} : 4 = 9\frac{13}{32}.$$

Soll ferner $7088\frac{5}{9}$ mit 37 dividirt werden, so setze man

$$
\begin{array}{r|l}
37)\ 7088\frac{5}{9} & 191 \\
37 & \\
\hline
338 & \\
333 & \\
\hline
58 & \\
37 & \\
\hline
21 &
\end{array}
$$

Diesen Rest 21 löse man in Neuntel auf, wodurch man $\frac{189}{9}$ erhält und addire hierzu die $\frac{5}{9}$, welche in der gegebenen gemischten Zahl vorkommen. Man erhält also $\frac{194}{9}$. Werden nun auch diese mit 37 dividirt, so erhält man $\frac{194}{9} : 37 = \frac{194}{333}$. Es ist also $7088\frac{5}{9} : 37 = 191\frac{194}{333}$.

Aufgaben.

1) $7428\frac{3}{7} . 9$.
2) $90456\frac{5}{8} . 8$.
3) $42695\frac{5}{12} . 34$.
4) $75933\frac{1}{2} : 48$.

5) $903568\frac{17}{12}$: 293.

6) $19502889\frac{3}{5}$: 408.

§. 70. Erklärung.

Einen Bruch aufheben oder auf die kleinste Benennung bringen, heißt diesen Bruch in einen andern verwandeln, der an Werth dem gegebenen Bruche gleich ist, dessen Zähler und Nenner aber Primzahlen unter sich sind.

§. 71. Aufgabe.

Einen gegebenen Bruch aufzuheben oder auf die kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung.

1) Man suche für Zähler und Nenner das größte gemeinschaftliche Maaß, (§. 63.)

2) Dividire mit diesem den Zähler und Nenner, so erhält man einen neuen Bruch, der an Werth dem gegebenen gleich ist, und dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind. (§. 58 und §. 69. Zus. 5.) Soll z. B. der Bruch $\frac{2471}{3177}$ auf die kleinste Benennung gebracht werden, so suche man für die Zahlen 2471 und 3177 das größte gemeinschaftliche Maaß. Man findet 353. Dividirt man damit Zähler und Nenner, so erhält man den Bruch $\frac{7}{9}$, dessen Zähler und Nenner Primzahlen sind.

Zusatz. Man kann einen gegebenen Bruch auch dadurch auf die kleinste Benennung bringen, daß man seinen Zähler und Nenner in Faktoren auflöst und die gleichen Faktoren wegläßt, z. B. $\frac{84}{180} = \frac{4.21}{4.45} = \frac{21}{45}$

$= \frac{7 \cdot 3}{15 \cdot 3} = \frac{7}{15}$. Hiezu dienen auch die gegebenen Merkmale (§. 64. Anmerkung). Da sich jedoch die gleichen Faktoren, die im Zähler und Nenner vorkommen, bisweilen sehr schwer erkennen lassen, so ist das in der Auflösung gezeigte Verfahren vorzuziehen.

Aufgaben.

Folgende Brüche auf die kleinste Benennung zu bringen:

1) $\frac{351}{429}$; 2) $\frac{611}{799}$; 3) $\frac{1219}{1484}$; 4) $\frac{17353}{20461}$; 5) $\frac{1548}{1404}$ (Vergl. Zus.); 6) $\frac{102528}{130464}$; 7) $\frac{122536}{128792}$.

§. 72. Erklärungen.

a) Zwei oder mehrere Brüche heißen gleichnamig oder Brüche von einerlei Benennung, wenn sie alle einerlei Nenner haben; z. B. $\frac{5}{11}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{7}{11}$.

b) Zwei oder mehrere Brüche heißen ungleichnamig oder Brüche von verschiedener Benennung, wenn sie verschiedene Nenner haben; z. B. $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$, oder $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$.

c) Zwei oder mehrere Brüche gleichnamig machen oder auf einerlei Benennung bringen, heißt: diese Brüche in andere verwandeln, welche an Werth den gegebenen gleich sind, die aber nach der Verwandlung sämmtlich einerlei Nenner haben.

d) Eine Zahl, in welcher alle Nenner mehrerer gegebener ungleichnamiger Brüche ohne Rest enthalten sind, heißt ein gemeinschaftlicher oder Generalnenner dieser Brüche.

Zusatz. Es erhellt, daß es für mehrere gegebene Brüche mehr als einen Generalnenner giebt. So haben z. B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ die Zahlen 24, 48, 96 u. s. w. zu Generalnennern. Man versteht jedoch unter dem Generalnenner vorzugsweise die kleinste Zahl, in welcher alle Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten sind.

§. 73. Aufgabe.

Zwei gegebene ungleichnamige Brüche auf einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung.

Man multiplizire mit dem Nenner des zweiten Bruchs Zähler und Nenner des ersten Bruchs, und mit dem Nenner des ersten Bruchs Zähler und Nenner des zweiten Bruchs; z. B.

$\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ = $\frac{15}{20}$; $\frac{8}{20}$; eben so
$\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$ = $\frac{16}{24}$; $\frac{21}{24}$.

Beweis.

Der Werth der Brüche bleibt ungeändert (§. 69. Zus. 5.) und da ihre Nenner Produkte aus den nämlichen Faktoren, also einander gleich sind (§. 37. Zus. 3.), so sind die Brüche auf einerlei Benennung gebracht. (§. 72. c.)

Zusatz. 1. Ist der Nenner des einen Bruchs ein Vielfaches des Nenners des andern Bruchs, so bringt man diese Brüche dadurch auf einerlei Benennung, daß man Zähler und Nenner des letzteren Bruchs mit der Zahl multiplizirt, welche angiebt, wie oft der kleinere Nenner im größern enthalten ist. Z. B. $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$ = $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{6}$. Ferner $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$ = $\frac{7}{8}$; $\frac{6}{8}$. Ferner $\frac{5}{12}$; $\frac{3}{2}$ = $\frac{5}{12}$; $\frac{18}{12}$.

Zusatz. 2. Sollen drei ungleichnamige Brüche gleichnamig gemacht werden, so multiplizire man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Produkte aus den Nennern der übrigen Brüche. Sollen z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ gleichnamig gemacht werden, so erhält man: $\frac{2}{3}=\frac{2.4.5}{3.4.5}$; $\frac{3}{4}=\frac{3.3.5}{3.4.5}$; $\frac{2}{5}=\frac{3.4.2}{3.4.5}$; d. h. für die gegebenen Brüche $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ erhält man die gleichnamigen Brüche $\frac{40}{60}$; $\frac{45}{60}$; $\frac{24}{60}$.

Zusatz. 3. Auf ähnliche Weise lassen sich auch 4, 5 und noch mehrere gegebene Brüche auf einerlei Benennung bringen; allein es ist dieses Verfahren in den meisten Fällen zu weitläufig, und man richte sich daher, besonders wenn viele Brüche zugleich auf einerlei Benennung gebracht werden sollen, nach den folgenden Aufgaben.

Zusatz. 4. Wenn angegeben werden soll, welcher von 2 ungleichnamigen Brüchen, die verschiedene Zähler haben, der größere ist, so bringe man sie auf einerlei Benennung. Den größern Bruch erkennt man aus §. 69. Zus. 3.

§. 74. Aufgabe.

Für zwei oder mehrere gegebene Brüche den Generalnenner zu finden.

Erster Fall. Wenn nur zwei Brüche gegeben sind.

Zweiter Fall. Wenn mehrere Brüche gegeben sind.

Auflösung zu 1.

1) Sind die Nenner der gegebenen Brüche Primzahlen unter sich, so verfahre man nach §. 73.

2) Sind aber die Nenner zusammengesetzte Zahlen unter sich, so dividire man sie durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, multiplizire damit die Quotienten, so sind in dem Produkte die Nenner der Brüche ohne Rest enthalten (§. 60). Es ist also dieses Produkt ein Generalnenner (§. 72. d), und zwar, da man das größte gemeinschaftliche Maaß in Anwendung gebracht hat, der kleinste (§. 58). Soll z. B. für die Brüche $\frac{5}{16}$ und $\frac{7}{24}$ der Generalnenner gefunden werden, so theile man 16 und 24 durch ihr größtes gemeinschaftliches Maaß, d. i. durch 8. Man erhält die Quotienten 2 und 3. Es ist also $8 . 2 . 3 = 48$ durch 16 sowohl als durch 24 theilbar, d. h. 48 ist ein Generalnenner für die gegebenen Brüche und zwar der kleinste.

Auflösung zu 2.

1) Sind die Nenner der Brüche, für welche der Generalnenner gefunden werden soll, durchgehends Primzahlen unter sich, so giebt es keinen kleinern Generalnenner als das Produkt aus allen einzelnen Nennern der gegebenen Brüche.

2) Sind die Nenner der beiden ersten Brüche zusammengesetzte Zahlen unter sich, so verfahre man nach Aufl. 1. Nr. 2. und suche zu dem Produkte aus den Quotienten in das gebrauchte Maaß und dem dritten Nenner das größte gemeine Maaß, so ist das Produkt aus diesem Maaße in die Quotienten der Generalnenner für die drei ersten Brüche. Sind z. B. die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ und $\frac{2}{9}$ gegeben, so dividire man 6 und 8 durch 2 und multiplizire damit die Quotienten 3 und 4, so erhält man

3 . 4 . 2 = 24, in welcher Zahl die Nenner der beiden ersten Brüche ohne Rest enthalten sind (§. 60). Diese Zahl 24 und den Nenner 9 des dritten Bruchs dividire man durch ihr gemeinschaftliches Maaß 3, und multiplizire damit die Quotienten 8, 3, so erhält man 8 . 3 . 3 = 72, in welcher Zahl sowohl 24 als auch 9 ohne Rest enthalten sind. Da nun aber in 24 die Nenner 6 und 8 enthalten sind, so sind sie auch in 72 = 24 . 3 ohne Rest enthalten (§. 56. Zus. 2.), d. h. 72 ist der gesuchte Generalnenner.

4) Sind 4 Brüche gegeben, so verfahre man nach Nr. 3, suche zu der Zahl, welche man als Generalnenner für die drei ersten Brüche gefunden hat und dem Nenner des vierten Bruchs das größte gemeine Maaß, so ist das Produkt aus diesem Maaße in die Quotienten der gesuchte Generalnenner. Soll z. B. für die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{9}{56}$ der Generalnenner gefunden werden, so findet man nach Nr. 3 für die drei ersten Brüche den Generalnenner 72. Für diese Zahl und den Nenner 56 des vierten Bruchs suche man das größte gemeine Maaß (8), und multiplizire damit die Quotienten, so erhält man 9 . 7 . 8 = 504. Diese Zahl ist der gesuchte Generalnenner.

5) Auf eine ähnliche Weise verfahre man, wenn für 5 oder mehrere Brüche der Generalnenner gefunden werden soll.

Zusatz. Auch auf folgende Weise läßt sich für gegebene Brüche sehr leicht der Generalnenner finden.

1) Man setze die Nenner der gegebenen Brüche in eine Reihe neben einander,

2) Dividire die Nenner oder wenigstens deren zwei

mit einem gemeinschaftlichen Maaße, und zwar nehme man als solches eine absolute Primzahl (§. 56. b.), schreibe die Quotienten unter die getheilten Nenner und setze diejenigen Nenner, welche sich durch das gebrauchte Maaß nicht theilen ließen, in die Reihe der Quotienten.

3) Für diese Quotienten und noch ungetheilten Nenner oder wenigstens für 2 derselben nehme man wieder wie Nr. 2 ein gemeinschaftliches Maaß, und verfahre wie Nr. 2.

4) Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis alle erhaltenen Quotienten und ungetheilten Nenner, wenn nämlich deren noch vorhanden seyn sollten, Primzahlen unter sich sind.

5) Nun multiplizire man die erhaltenen Quotienten und ungetheilten Nenner mit den gebrauchten Maaßen, so ist das Produkt aus allen diesen Zahlen der gesuchte Generalnenner.

Beispiel.

Man soll für die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{9}$ den Generalnenner finden.

Auflösung.

3)	4, 6, 5, 12, 8, 9.	(Auflösung 1.)
2)	4, 2, 5, 4, 8, 3.	(Nr. 2.
2)	2, 1, 5, 2, 4, 3.	(Nr. 3.)
	1, 1, 5, 1, 2, 3.	(Nr. 4.)

Das Produkt 5 . 2 . 3 . 2 . 2 . 3 = 360 ist der gesuchte Generalnenner. (Nr. 5.)

Beweis.

In dem gefundenen Produkte Nr. 5 sind alle Nenner der gegebenen Brüche ohne Rest enthalten (§. 60.

Zus.), es ist also derselbe ein Generalnenner, und da die Maaße sowohl als die zuletzt erhaltenen Quotienten Primzahlen sind, so ist der gefundene Generalnenner der kleinste.

§. 75. Aufgabe.

Für die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{18}$ den Generalnenner zu finden.

Erste Auflösung.

2) Die Nenner 3 und 8 der beiden ersten Brüche sind Primzahlen unter sich; ihr Generalnenner ist daher 24 (§. 74).

2) Die Zahl 24 und der Nenner 16 des dritten Bruchs haben das größte gemeinschaftliche Maaß 8. Die Quotienten sind 3 und 2. Es ist also 3 . 2 . 8 = 48 durch 24 und 16, folglich durch die Nenner der drei ersten Brüche theilbar, d. h. 48 ist der Generalnenner dieser Brüche.

3) Die Zahl 48 und der Nenner 7 des vierten Bruchs sind Primzahlen unter sich, folglich ist 48 . 7 = 336 der Generalnenner der vier ersten Brüche.

4) Die Zahl 336 und der Nenner 18 des fünften Bruchs haben das größte gemeinschaftliche Maaß 6. Die Quotienten sind 56 und 3. Es ist also 56 . 3 . 6 = 1008 durch 336 und 18, folglich durch die Nenner der gegebenen Brüche theilbar.

5) Es ist also 1008 ein Generalnenner dieser Brüche und zwar, weil immer das größte gemeinschaftliche Maaß in Anwendung gebracht worden ist, der kleinste.

Zweite Auflösung.

Man verfahre ganz nach §. 74. Zus.

2)	3,	8,	16,	7,	18
2)	3,	4,	8,	7,	9
2)	3,	2,	4,	7,	9
3)	3,	1,	2,	7,	9
	1,	1,	2,	7,	3

Das Produkt aus den erhaltenen Quotienten in die gebrauchten Maaße, d. h. 3 . 7 . 2 . 3 . 2 . 2 . 2 = 1008 ist der gesuchte Generalnenner.

Aufgaben.

Man soll für folgende Brüche den kleinsten Generalnenner finden.

1) $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{5}$.

2) $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{15}$.

3) $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{24}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$.

§. 76. Aufgabe.

Mehrere Brüche auf einerlei und zwar die kleinste Benennung zu bringen.

Auflösung.

1) Man suche für die gegebenen Brüche den kleinsten Generalnenner.

2) Man setze die Brüche in eine Reihe unter einander, ziehe zur Rechten einen senkrechten Strich, und setze oben zur Rechten den gefundenen Generalnenner an.

3) Nun dividire man mit dem Nenner des ersten Bruchs in den Generalnenner, setze den Quotienten an, ziehe zur Rechten aufs Neue einen senkrechten Strich, multiplizire den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des ersten Bruchs

und betrachte das Produkt als den Zähler, zu welchem der Generalnenner als Nenner gehört.

4) Auf gleiche Weise verfahre man mit den übrigen Brüchen.

Beweis.

Durch das gezeigte Verfahren erhalten alle gegebene Brüche den kleinsten Generalnenner zum Nenner, und da Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit der nämlichen Zahl multiplizirt wird, so sind sie den gegebenen Brüchen an Werth gleich. (§. 69. Zus. 5.)

Beispiel.

Folgende Brüche gleichnamig zu machen.

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}.$$

Auflösung.

1) 2] 4, 6, 5, 8, 9, 12
   2] 2, 3, 5, 4, 9, 6
   3] 1, 3, 5, 2, 9, 3
   1, 1, 5, 2, 3, 1

Es ist also 3 . 2 . 5 . 3 . 2 . 2 = 360 der Generalnenner.

	360		
2) $\frac{3}{4}$	90	270;	Es ist also $\frac{3}{4} = \frac{270}{360}$.
$\frac{5}{6}$	60	300	$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$.
$\frac{2}{5}$	72	144	$\frac{2}{5} = \frac{144}{360}$.
$\frac{1}{8}$	45	45	$\frac{1}{8} = \frac{45}{360}$.
$\frac{4}{9}$	40	160	$\frac{4}{9} = \frac{160}{360}$.
$\frac{5}{12}$	30	150	$\frac{5}{12} = \frac{150}{360}$.

Aufgaben.

Folgende Brüche auf einerlei Benennung zu bringen.

1) $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$;

2) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$;

3) $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$.

Zusatz. Kommen gemischte Zahlen vor, so verwandle man sie in unächte Brüche. (§. 67. Zus. 1.)

II. Von den Rechnungsarten mit Brüchen.

A. Addition.

§. 77. Aufgabe.

Zwei oder mehrere Brüche zu addiren.

Auflösung.

1) Sind die Brüche gleichnamig, so addire man ihre Zähler und setze unter die Summe derselben den gemeinschaftlichen Nenner; z. B. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$. Ferner $\frac{7}{11} + \frac{9}{11} + \frac{3}{11} = \frac{19}{11} = 1\frac{8}{11}$.

2) Sind die Brüche ungleichnamig, so bringe man sie auf einerlei Benennung und verfahre sodann nach Nr. 1. Z. B. $\frac{5}{7} + \frac{5}{6} = \frac{30}{42} + \frac{35}{42} = \frac{30 + 35}{42} = \frac{65}{42} = 1\frac{23}{42}$. Ferner $\frac{5}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{105}{168} + \frac{28}{168} + \frac{24}{168} = \frac{105 + 28 + 24}{168} = \frac{157}{168}$.

Beispiel.

Man soll folgende Brüche addiren: $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{15}$.

Auflösung.

1) Man findet den Generalnenner 840.

2)

	840	
$\frac{5}{6}$	140	700
$\frac{4}{5}$	168	672
$\frac{1}{3}$	280	280
$\frac{7}{8}$	105	735
$\frac{5}{12}$	70	350
$\frac{3}{7}$	120	360
$\frac{2}{15}$	56	112

$\frac{3209}{840} = 3\frac{689}{840}$.

Zusatz. 1. $5 + \frac{2}{7} = 5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$.

Zusatz. 2. Sind gemischte Zahlen zu addiren, so addire man zuerst die Brüche, welche in ihnen vorkommen, setze die Summe derselben an und füge ihr zur Linken die Summe aus den Ganzen bei; z. B. $4\frac{2}{7} + 3\frac{1}{4} = 7\frac{15}{28}$. Ist aber die Summe aus den einzelnen Brüchen, die in den gemischten Zahlen vorkommen, ein unächter Bruch, so verwandle man ihn in eine gemischte Zahl, setze den in ihr liegenden ächten Bruch an und nehme die in ihr enthaltenen Ganzen zur Summe aus den Ganzen der gegebenen gemischten Zahlen. Sind z. B. die gemischten Zahlen $5\frac{8}{9}$ u. $6\frac{5}{8}$ zu addiren, so ist die Summe der Brüche $\frac{8}{9}$ und $\frac{5}{8}$ $= \frac{109}{72} = 1\frac{37}{72}$. Man setze also $\frac{37}{72}$ an, und nehme 1 zu den Ganzen der gemischten Zahlen, so daß also $5\frac{8}{9} + 6\frac{5}{8} = 12\frac{37}{72}$.

§. 78. Aufgaben.

Folgende Brüche sollen addirt werden.

1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$;

2) $\frac{7}{8} + \frac{1}{7} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}$;

3) $\frac{2}{5} + \frac{7}{12} + \frac{2}{7} + \frac{4}{9} + \frac{1}{2}$;

4) $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{2}{5} + \frac{3}{13} + \frac{11}{12} + \frac{1}{9}$.

5) $\frac{4}{9} + \frac{7}{11} + \frac{13}{24} + \frac{17}{18} + \frac{3}{5} + \frac{7}{8}$;

6) $\frac{3}{4} + 1\frac{5}{7} + 2\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$;

7) $13\frac{5}{8} + 10\frac{4}{9} + 8\frac{5}{6} + 19\frac{5}{6} + 106\frac{3}{7}$;

8) $209\frac{14}{23} + \frac{5}{9} + 13\frac{5}{6} + 12\frac{2}{7} + 54\frac{1}{2} + 11\frac{2}{5}$;

9) $22\frac{4}{7} + 18\frac{2}{17} + \frac{4}{13} + 15\frac{1}{2} + 391\frac{55}{72} + 29\frac{3}{52}$;

10) $15\frac{7}{12} + 3\frac{5}{19} + 1\frac{5}{36} + 4\frac{3}{25} + \frac{5}{7} + 3\frac{5}{8} + 5\frac{3}{5}$.

B. Subtraktion.

§. 79. Aufgabe.

Von einem gegebenen Bruche einen andern zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Sind die Brüche gleichnamig, so subtrahire man den Zähler des Subtrahenden vom Zähler des Minuenden und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner; z. B. $\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.

2) Sind die Brüche ungleichnamig, so bringe man sie auf einerlei Benennung und verfahre sodann nach Nr. 1.

Z. B. $\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30 - 28}{35} = \frac{2}{35}$.

Zusatz. 1. Soll von einer gemischten Zahl eine ganze Zahl subtrahirt werden, so subtrahire man den Subtrahenden von den Ganzen des Minuenden und setze dem Reste den Bruch, welcher im Minuenden vorkömmt, bei. Z. B. $9\frac{5}{6} - 7 = 2\frac{5}{6}$.

Zusatz. 2. Soll von einer ganzen Zahl ein ächter

Bruch subtrahirt werden, so löse man eine Einheit des Minuenden in die Theile auf, welche der Nenner des Subtrahenden angiebt, subtrahire von dem hiedurch entstandenen Bruche den Subtrahenden und setze den um 1 verminderten Minuenden dem Reste zur Linken bei. Soll z. B. von 4 der ächte Bruch $\frac{5}{8}$ subtrahirt werden, so nehme man vom Minuenden 4 eine Einheit, d. i. 1, und löse diese in Achtel auf; dieß giebt $\frac{8}{8}$, subtrahire von diesem Bruche den Subtrahenden $\frac{5}{8}$, wodurch man $\frac{3}{8}$ erhält, und setze diesem Reste den um 1 verminderten Minuenden d. i. $4 - 1 = 3$ zur Linken bei. Es ist also $4 - \frac{5}{8} = 3\frac{3}{8}$. Eben so ist $7 - \frac{5}{7} = 6\frac{7}{7} - \frac{5}{7} = 6\frac{2}{7}$; $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Zusatz. 3. Soll von einer ganzen Zahl eine gemischte Zahl subtrahirt werden, so löse man eine Einheit des Minuenden in die Theile auf, welche der Nenner des Bruchs im Subtrahenden angiebt, subtrahire von dem hiedurch entstandenen Bruche den Bruch des Subtrahenden, subtrahire sodann die Ganzen des Subtrahenden von den Ganzen im Minuenden, die aber, wie gesagt, um 1 vermindert worden sind, und setze den zweiten Rest dem ersten zur Linken bei. Soll z. B. von 12 die gemischte Zahl $4\frac{3}{11}$ subtrahirt werden, so löse man eine Einheit des Minuenden in Eilftel auf; dieß giebt $\frac{11}{11}$, subtrahire hievon die $\frac{3}{11}$ des Subtrahenden, so bleibt $\frac{8}{11}$; nun subtrahire man die 4 Ganzen des Subtrahenden von den gebliebenen 11 Ganzen des Minuenden, wodurch man 7 erhält, und setze diesem Rest dem ersten zur Linken bei. Es ist also $12 - 4\frac{3}{11} = 7\frac{8}{11}$.

Zusatz. 4. Soll von einer ganzen Zahl ein un-

ächter Bruch subtrahirt werden, so verwandle man ihn in eine gemischte Zahl und verfahre nach Zusatz 3.

Zusatz. 5. Soll von einer gemischten Zahl eine andere gemischte Zahl subtrahirt werden, und ist der Bruch im Subtrahenden kleiner als der im Minuenden (§. 73. Zus. 4.), so subtrahire man den des Subtrahenden von dem des Minuenden, nehme sodann die Ganzen des Subtrahenden von den Ganzen des Minuenden weg und setze den zweiten Rest zur Linken des ersten an. Z. B. $17\frac{5}{8} - 12\frac{2}{7} = 5\frac{19}{56}$. Ist aber der Bruch im Subtrahenden größer als der im Minuenden, so nehme man eine Einheit des Minuenden, löse sie in die Theile auf, welche der Nenner des Minuenden angiebt, subtrahire von diesem unächten Bruche den ächten Bruch des Subtrahenden, nehme sodann die Ganzen des Subtrahenden von den Ganzen des Minuenden, die aber, wie gesagt, um 1 vermindert worden sind, weg, und setze den zweiten Rest dem ersten zur Linken bei. Z. B. $37\frac{2}{9} - 23\frac{5}{8} = 36\frac{11}{9} - 23\frac{5}{8} = 13\frac{43}{72}$.

Wenn eine gemischte Zahl von einer andern gemischten Zahl subtrahirt werden soll, so kann man auch beide in unächte Brüche verwandeln und sodann nach der gegebenen Auflösung die Subtraktion vornehmen. Z. B. $37\frac{2}{9} - 23\frac{5}{8} = \frac{335}{9} - \frac{189}{8} = \frac{2680 - 1701}{72} = \frac{979}{72} = 13\frac{43}{72}$. Eben so ist $55\frac{1}{8} - 47\frac{3}{13} = \frac{441}{8} - \frac{614}{13} = \frac{5733 - 4912}{104} = \frac{821}{104} = 7\frac{93}{104}$.

Zusatz. 6. So wie bei ganzen Zahlen dienen sich auch bei den Brüchen Addition und Subtraktion gegenseitig zur Probe. (§. 33. Zus. 2 und 3.) Z. B.

1) $\frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{15 + 16}{24} = \frac{31}{24}$;

$\frac{31}{24} - \frac{2}{3} = \frac{31 - 16}{24}$ (§. 73. Zus. 1) $= \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

2) $\frac{5}{6} - \frac{3}{7} = \frac{35 - 18}{42} = \frac{17}{42}$;

$\frac{17}{42} + \frac{3}{7} = \frac{17 + 18}{42} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}$.

§. 80. Aufgaben.

1) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; 2) $\frac{7}{9} - \frac{3}{4}$; 3) $8\frac{4}{5} - 3$; 4) $7 - \frac{4}{13}$; 5) $8 - 3\frac{5}{8}$; 6) $12 - 11\frac{4}{7}$; 7) $14\frac{7}{12} - 9\frac{1}{2}$; 8) $57\frac{13}{27} - 48\frac{8}{33}$; 9) $159\frac{39}{116} - 98\frac{7}{8}$; 10) $201\frac{5}{7} - 109\frac{314}{317}$.

C. Multiplikation.

§. 81. Aufgabe.

Zwei gegebene Brüche mit einander zu multipliziren.

Auflösung.

Man multiplizire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Das Produkt aus den Zählern nehme man als den Zähler, und das Produkt aus den Nennern nehme man als den Nenner des gesuchten Produkts; z. B. $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

Beweis.

Das Produkt entsteht aus dem Multiplikanden wie der Multiplikator aus der Einheit entstanden ist. (§. 36.) Ist nun der Multiplikator z. B. $= \frac{2}{3}$, so ist derselbe aus der Einheit dadurch entstanden, daß man sie in drei gleiche Theile theilte, und einen solchen Theil zweimal nahm, denn $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (§. 68), und $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$ (§. 69). Wird nun der Multiplikand z. B. $\frac{4}{5}$ eben-

falls in drei gleiche Theile getheilt, so ist $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$ (§. 69. Nr. 2.), und wird ein solcher Theil zweimal genommen, so ist $\frac{4}{15} \times 2 = \frac{8}{15}$. Das nämliche Produkt erhält man aber auch, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner in den gegebenen Brüchen multiplizirt. Es ist einleuchtend, daß statt der Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ jede andere Brüche genommen werden können, und es folgt hieraus die allgemeine Giltigkeit des in der Auflösung angegebenen Verfahrens.

Zusatz. 1. Man kann sich von der Richtigkeit der gegebenen Auflösung auch auf folgende Weise überzeugen. Wenn $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplizirt werden soll, so heißt dieß, man soll den dritten Theil von $\frac{4}{5}$ zweimal nehmen. §. 35. Nun ist der dritte Theil von $\frac{4}{5}$ so viel als $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$; und da ein solcher Theil zweimal genommen werden soll, so erhält man $\frac{4}{15} . 2 = \frac{8}{15}$.

Zusatz. 2. Sind mehrere Brüche mit einander zu multipliziren, so multiplizire man alle Zähler, sowie auch alle Nenner mit einander, z. B. $\frac{3}{4} . \frac{5}{8} . \frac{7}{11} = \frac{3 . 5 . 7}{4 . 8 . 11} = \frac{105}{352}$.

Zusatz. 3. Auch bei Brüchen geben Faktoren in veränderter Ordnung einerlei Produkte; z. B.

$\frac{5}{7} . \frac{3}{8} = \frac{3}{8} . \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$; oder

$\frac{5}{6} . 7 = 7 . \frac{5}{6} = \frac{35}{7}$. Ferner

$\frac{2}{5} . \frac{3}{7} . \frac{4}{11} = \frac{2 . 3 . 4}{5 . 7 . 11} = \frac{3 . 2 . 4}{7 . 5 . 11}$ u. s. w.

Zusatz. 4. Sind gemischte Zahlen mit einander zu multipliziren, so verwandle man sie in unächte Brüche; z. B. $2\frac{3}{4} . 4\frac{1}{2} = \frac{11}{4} . \frac{9}{2} = \frac{99}{8} = 12\frac{3}{8}$.

Eben so ist $\frac{5}{8} . 5\frac{5}{6} = \frac{5}{8} . \frac{35}{6} = \frac{175}{48} = 3\frac{31}{48}$.

Zusatz. 5. Wenn der Zähler eines Bruchs dem Nenner eines andern Bruchs gleich ist, so lasse man bei der Multiplikation diese gleichen Zahlen ganz weg; z. B. $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$. Sind der Zähler des einen und der Nenner des andern Bruchs zusammengesetzte Zahlen unter sich, so löse man sie in einfache Faktoren auf, und lasse die gleichen Faktoren ganz weg; z. B. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{15}$ (§. 71. Zus.)

Zusatz. 6. Wenn mehrere Brüche mit einander multiplizirt werden sollen, so lasse man die gleichen Zahlen, welche in den Zählern der einen und in den Nennern der andern vorkommen, ganz weg. Sollen z. B. die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ mit einander multiplizirt werden, also $\frac{5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7}$; so lasse man 5 im Zähler gegen 5 im Nenner weg, oder streiche diese gleichen Zahlen aus; ferner fällt 4 aus dem Zähler weg und verwandelt 8 im Nenner in 2; eben so fällt 3 aus dem Zähler weg und verwandelt 6 im Nenner in 2.

Man erhält also $\frac{\not{5} \cdot 1 \cdot \not{4} \cdot \not{3}}{\underset{2}{\not{8}} \cdot \underset{2}{\not{6}} \cdot \not{5} \cdot 7} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{1}{28}$.

Zusatz. 7. Ist der Multiplikator ein ächter Bruch, so ist das Produkt kleiner als der Multiplikand; z. B. $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$.

Zusatz. 8. Das Produkt aus zwei ächten Brüchen ist kleiner als jeder Faktor für sich betrachtet.

Zusatz. 9. Das Produkt aus zwei unächten Brüchen ist größer als jeder einzelne Faktor; z. B. $\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{28}{15}$, und $\frac{28}{15}$ ist größer als $\frac{4}{3}$ oder $\frac{7}{5}$.

Zusatz. 10. Nur bei ganzen Zahlen oder auch bei unächten Brüchen läßt sich multipliziren mit vervielfältigen erklären.

§. 82. Aufgaben.

1) $\frac{7}{15} \cdot \frac{8}{29}$; 2) $\frac{14}{17} \cdot \frac{12}{19} \cdot \frac{37}{43}$; 3) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$ (§. 81. Zus. 5); 4) $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7}$ (§. 81. Zus. 6); 5) $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{7}$; 6) $4\frac{2}{7} \cdot 5\frac{3}{8}$; 7) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4\frac{5}{6}$; 8) $4\frac{2}{7} \cdot 3\frac{5}{9} \cdot 4\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{4}$; 9) $13\frac{17}{41} \cdot 24\frac{14}{37} \cdot 38\frac{3}{34} \cdot 17\frac{5}{9} \cdot \frac{28}{29} \cdot 3\frac{13}{14}$; 10) $54\frac{12}{13} \cdot 16\frac{5}{9} \cdot 14 \cdot 12\frac{14}{15} \cdot \frac{7}{12} \cdot 61\,\frac{4}{7}$.

D. Division.

§. 83. Aufgabe.

Einen gegebenen Bruch durch einen andern gegebenen Bruch zu dividiren.

Auflösung.

Man kehre den Divisor um, so daß aus dem Zähler der Nenner und aus dem Nenner der Zähler des Bruchs wird, und verfahre sodann nach der Regel der Multiplikation, d. h. man multiplizire nach der Umkehrung des Divisors Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner; z. B. $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$.

Beweis.

Der Quotient entsteht aus dem Dividenden, wie die Einheit aus dem Divisor abgeleitet werden kann. (§. 46.) Aus einem Bruche wird die Einheit dadurch abgeleitet, daß man den Bruch mit seinem Nenner multiplizirt und das Produkt mit dem Zähler dividirt. (§. 69. Zus. 8.) Im gegebenen Falle ist der Divi-

sor = $\frac{2}{7}$, und aus diesem erhält man die Einheit dadurch, daß man $\frac{2}{7}$ mit 7 multiplizirt und das Produkt durch 2 dividirt. $\frac{2}{7} . 7 = 2$; $2 : 2 = 1$.

Nimmt man nun eben diese Veränderungen mit dem Dividenden vor, so erhält man $\frac{3}{5} . 7 = \frac{21}{5}$; $\frac{21}{5} : 2 = \frac{21}{10}$. Diesen nämlichen Quotienten erhält man aber auch, wenn man den Dividenden mit dem umgekehrten Divisor multiplizirt.

Zusatz. 1. Man kann sich von der Richtigkeit der Auflösung auch auf folgende Weise überzeugen. Wenn $\frac{3}{5}$ durch $\frac{2}{7}$ dividirt werden soll, so hat man zu untersuchen, wie oft $\frac{2}{7}$ in $\frac{3}{5}$ enthalten ist. (§. 45. a.) Nimmt man nun statt des Divisors $\frac{2}{7}$ die ganze Zahl 2 als Divisor an, so ist derselbe siebenmal zu groß (§. 69. Zus. 7), folglich wird der Quotient siebenmal zu klein. (§. 48. II.)

Nun ist $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$; weil aber dieser Quotient siebenmal zu klein ist, so hat man $\frac{3}{10}$ mit 7 zu multipliziren. Man erhält $\frac{3}{10} . 7 = \frac{21}{10}$, und denselben Bruch findet man auch dadurch, daß man den Divisor umkehrt und sodann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt.

Zusatz. 2. $3 : \frac{5}{7} = 3 . \frac{7}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$

$5 : \frac{3}{2} = 5 . \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

$3 : \frac{1}{2} = 3 . \frac{2}{1} = 6$.

Zusatz. 3. Soll eine ganze Zahl durch eine gemischte Zahl dividirt werden, so verwandle man diese in einen unächten Bruch z. B.

$5 : 2\frac{3}{7} = 5 : \frac{17}{7} = 5 . \frac{7}{17} = \frac{35}{17} = 2\frac{1}{17}$.

Zusatz. 4. Soll eine gemischte Zahl mit einem Bruche dividirt werden, so verwandle man jene in

8*

einen unächten Bruch u. s. w. z. B. $3\frac{2}{5} : \frac{5}{8} = 3\frac{2}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{17}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{136}{25} = 5\frac{11}{25}$; oder $2\frac{5}{6} : \frac{9}{4} = \frac{17}{6} : \frac{9}{4} = \frac{17}{6} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{3} \cdot \frac{2}{9}$ (§. 81. Zus. 5) $= \frac{34}{27} = 1\frac{7}{27}$.

Zusatz. 5. Soll eine gemischte Zahl mit einer andern gemischten Zahl dividirt werden, so verwandle man sie in unächte Brüche, und verfahre auf die bisher gezeigte Weise, z. B.

$$3\frac{2}{3} : 4\frac{1}{4} = \frac{11}{3} : \frac{17}{4} = \frac{11}{3} \cdot \frac{4}{17} = \frac{44}{51}.$$

Zusatz. 6. Soll ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden, und ist der Zähler des Divisors im Zähler des Dividenden und der Nenner des Divisors im Nenner des Dividenden ohne Rest enthalten, so dividire man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner; z. B. $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{15}{22} : \frac{5}{11} = \frac{3}{2}$.

Zusatz. 7. Ist der Divisor ein ächter Bruch, so ist der Quotient größer als der Dividend; z. B.

$$4\frac{3}{7} : \frac{5}{8} = \frac{31}{7} \cdot \frac{8}{5} = \frac{248}{35} = 7\frac{3}{35}.$$

Zusatz. 8. Nur bei ganzen Zahlen kann die Division als eine abgekürzte Subtraktion betrachtet werden. (§. 45. Zus. 9.)

Zusatz. 9. So wie bei ganzen Zahlen dienen sich auch bei Brüchen Multiplikation und Division gegenseitig zur Probe, (§. 53. Zusätze 4 u. 5); z. B.

$\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$ und
$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$; ferner
$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$ und
$\frac{8}{21} : \frac{4}{7} = \frac{2}{3}$.

§. 84. Aufgaben.

1) $\frac{4}{7} : \frac{3}{16}$; 2) $\frac{9}{16} : \frac{3}{4}$. (§. 83. Zus. 6.) 3) $\frac{4}{9} : \frac{8}{7}$ (§. 81. Zus. 5); 4) $13 : \frac{7}{33}$; 5) $47 : \frac{22}{19}$;

6) $123\frac{4}{7} : \frac{48}{59}$; 7) $19\frac{1}{2} : 27\frac{2}{5}$; 8) $501\frac{7}{45} : 236\frac{8}{33}$; 9) $\frac{5}{7} : 2\frac{113}{205}$; 10) $317\frac{221}{507} : 812\frac{16}{17}$; 11) $52\frac{333}{701} : 91\frac{22}{37}$; 12) $407\frac{5}{13} : 922\frac{8}{9}$.

§. 85. Vermischte Aufgaben über die Rechnungsarten mit Brüchen.

1) $(\frac{5}{6} + \frac{2}{7}) . (\frac{2}{5} - \frac{1}{7})$. *)

2) $(\frac{3}{4} + \frac{5}{12} - \frac{7}{8}) . (4\frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{8}{7})$.

3) $(5\frac{3}{17} - 2\frac{5}{16} + \frac{3}{4}) (18\frac{5}{6} - 2\frac{8}{9} + \frac{7}{12})$.

4) $(9\frac{5}{12} + 25\frac{1}{2} - 13\frac{7}{18}) (9 - \frac{5}{6} - \frac{7}{8})$.

5) $(18\frac{1}{3} - 4\frac{1}{2} . 3\frac{4}{5}) : (3\frac{1}{7} - 1\frac{5}{8})$.

6) $(29\frac{4}{5} + 16\frac{3}{4} . 7\frac{4}{5}) : (5\frac{5}{8} . 2\frac{3}{11})$.

7) $(33\frac{2}{7} . 4 - 12 . 2\frac{1}{5}) : (13\frac{1}{3} . 7 - 42\frac{1}{5})$.

8) $(17\frac{5}{38} . 19 - 147\frac{3}{11}) : (906\frac{2}{7} : 977\frac{2}{5})$.

Auflösung.

Zu 1. $\frac{141}{490}$; zu 2. $\frac{143}{108} = 1\frac{35}{108}$; zu 3. $\frac{584885}{9792} = 59\frac{7157}{9792}$; zu 4. $\frac{135625}{864} = 156\frac{841}{864}$; zu 5. $\frac{1036}{1275}$; zu 6. $\frac{70598}{5625} = 12\frac{3098}{5625}$; zu 7. $\frac{11208}{5369} = 2\frac{470}{5369}$; zu 8. $\frac{134133489}{697840} = 192\frac{148209}{697840}$.

---

*) Man soll die Summe der beiden Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{7}$ mit der Differenz zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{7}$ multipliziren. Man addire also zuerst die Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{7}$, subtrahire sodann $\frac{1}{7}$ von $\frac{2}{5}$, und multiplizire mit diesem Reste die für $\frac{5}{6}$ und $\frac{2}{7}$ erhaltene Summe. Auf ähnliche Weise verfahre man bei den übrigen Aufgaben.

Fünfter Abschnitt.

Von den Dezimalbrüchen.

---

§. 86. Erklärungen.

a) Es ist §. 18 gezeigt worden, daß nach dem Dezimalsysteme die äusserste Ziffer zur Rechten einer gegebenen Zahl auf Einheiten der ersten Ordnung, d. h. auf Einer, sich bezieht, daß sich die zweite Ziffer von der Rechten gegen die Linke auf Einheiten der zweiten Ordnung d. h. auf Zehner bezieht, daß durch die dritte Ziffer von der Rechten gegen die Linke Einheiten der dritten Ordnung angedeutet werden, welche Hunderter heißen u. s. w., so daß also jede folgende Ziffer gegen die Linke auf Einheiten sich bezieht, von welchen jede das Zehnfache derjenigen Einheiten beträgt, welche durch die unmittelbar zur Rechten stehende Ziffer ausgedrückt werden. Hieraus folgt, daß, wenn man die Ziffern von der Linken gegen die Rechte betrachtet, jede zur Rechten folgende Ziffer Einheiten anzeigt, welche nur den zehnten Theil derjenigen Einheiten betragen, welche ihr unmittelbar zur Linken stehen. Ist z. B. die Zahl 764 gegeben, so bezieht sich 7 auf Hunderter, 6 auf Zehner; ein Zehner ist aber nur der zehnte Theil eines Hunderters. Den

Zehnern 6 zur Rechten stehen 4 Einer; ein Einer ist aber nur der zehnte Theil eines Zehners.

Denkt man sich nun den Einern zur Rechten noch eine Ziffer gesetzt, diese aber von den Einern selbst durch irgend ein Zeichen, z. B. durch ein Komma getrennt, so wird dieselbe, wenn das Dezimalsystem beibehalten wird, auf Einheiten sich beziehen, deren jede nur den zehnten Theil eines Einers beträgt; der zehnte Theil eines Einers ist aber $\frac{1}{10}$. Setzt man z. B. 764, 8, so wird diese Zahl aus 764 Ganzen und 8 Zehnteln bestehen. Folgt auf die Zehntel noch ein Zahlzeichen, so bezieht sich dasselbe auf Einheiten, welche nur den zehnten Theil eines Zehntels betragen, also auf Hundertel, und somit wird die Zahl 764, 86 aus 764 Ganzen, 8 Zehnteln und 6 Hunderteln bestehen. Nach dem nämlichen Gesetze folgen den Hunderteln zur Rechten die Tausendtel, diesen die Zehntausendtel, diesen die Hunderttausendtel, diesen die Milliontel u. s. f. So ist z. B. der Ausdruck $54{,}78457 = 55 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{7}{100000}$, ohne daß man nothwendig hätte, die Nenner unter die einzelnen Zähler zu setzen.

Da nun die den Ganzen zur Rechten stehenden Ziffern auf Brüche sich beziehen, welche genau das Dezimalsystem befolgen, so nennt man sie, oder vielmehr die ganzen Ausdrücke, in welchen sie vorkommen, Dezimalbrüche. So ist z. B. 4, 37 ein Dezimalbruch. Die dem Komma, welches auch das Einerzeichen heißt, zur Rechten stehenden Ziffern nennt man Dezimalstellen, so daß also der Bruch 4, 37 zwei Dezimalstellen enthält.

b) Die im vorigen Abschnitte betrachteten Brüche, bei welchen die Nenner angesetzt werden mußten, heißen zur Unterscheidung von den Dezimalbrüchen gemeine Brüche.

Zusatz. 1. Ist ein Dezimalbruch kleiner als ein Ganzes, also ein ächter Bruch (§. 66. Zus. 1), so setzt man an die Stelle der Ganzen eine Null, z. B. 0,73.

Zusatz. 2. Ein Dezimalbruch bleibt ungeändert, man mag zur Rechten oder zur Linken Nullen anhängen, vorausgesetzt, daß das Komma seine Stelle behält; z. B. 56,7 = 0 56,700. Eben so ist 5 = = 5,000. Es läßt sich also auch jede ganze Zahl in der Form eines Dezimalbruchs darstellen.

Zusatz. 3. Der Dezimalbruch 5,47 wird nach dem Bisherigen ausgesprochen, 5 Ganze, 4 Zehntel, 7 Hundertel; man kann aber auch darauf sehen, welchen Lokalwerth die äusserste Stelle zur Rechten hat und darnach die Dezimalstellen benennen. Ist z. B. 7,923 gegeben, so bezieht sich die äusserste Stelle zur Rechten auf Tausendtel. Man spreche also 7,923 aus: 7 Ganze und 923 Tausendtel. Es ist nämlich 7,923 = 7 + $\frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$. Bringt man nun die Brüche auf einerlei Benennung, so erhält man 7 + $\frac{923}{1000} = 7\frac{923}{1000}$.

Zusatz. 4. Soll der Dezimalbruch 7 Hundertel, 9 Tausendel geschrieben werden, so setze man 0,079, d. h. die Stellen, für welche keine Einheiten gegeben sind, fülle man durch Nullen aus.

Zusatz. 5. Ein Dezimalbruch wird mit 10 multiplizirt, wenn man das Komma um eine Stelle von der Linken gegen die Rechte rückt, z. B. 59,723 . 10 = 597,23.

Rückt man nämlich das Komma um eine Stelle weiter gegen die Rechte, so kömmt dadurch jede Ziffer des Dezimalbruchs um eine Stelle weiter gegen die Linke: aus den Zehnern werden Hunderter, aus den Einern Zehner, aus den Zehnteln Einer, aus den Hunderteln werden Zehntel u. s. w. Da also jeder einzelne Theil um das Zehnfache zunimmt, so nimmt auch das Ganze um das Zehnfache zu, d. h. der Dezimalbruch ist mit 10 multiplizirt. Eben so wird ein Dezimalbruch mit 100, 1000 u. s. w. multiplizirt, wenn man das Komma um so viele Stellen von der Linken gegen die Rechte rückt, als nach 1 Nullen folgen; z. B. $23{,}567 \times 100 = 2356{,}7$. Hat der Dezimalbruch nicht so viele Stellen als im Multiplikator nach 1 Nullen folgen, so hängt man ihm zur Rechten eine erforderliche Anzahl Nullen an, z. B. $4{,}7 \times 1000 = 4700$.

Zusatz. 6. Ein Dezimalbruch wird mit 10 dividirt, wenn man das Komma um eine Stelle von der Rechten gegen die Linke rückt, z. B. $57{,}56 : 10 = 5{,}756$. Dadurch nämlich, daß das Komma um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt wird, kömmt jede Ziffer des Dezimalbruchs um eine Stelle weiter gegen die Rechte, und nimmt somit um das Zehnfache ab. Da nun jeder einzelne Theil mit 10 dividirt ist, so ist auch das Ganze, d. h. der Dezimalbruch mit 10 dividirt. Eben so wird ein Dezimalbruch mit 100, 1000 u. s. w. dividirt, wenn man das Komma um so viele Stellen von der Rechten gegen die Linke rückt, als nach 1 Nullen folgen, z. B. $794{,}3 : 100 = 7{,}943$; $5{,}93 : 10 = 0{,}593$; $7{,}2 : 100 = 0{,}072$; $0{,}984 : 100 = 0{,}00984$; $7{,}46 : 1000 = 0{,}00746$.

Zusatz. 7. Eine ganze Zahl wird mit 10 dividirt, wenn man durch das Komma die äusserste Ziffer zur Rechten abschneidet, z. B. 548 : 10 = 54,8. So ist ferner 744 : 100 = 7,44; 27 : 100 = 0,27; 19 : 1000 = 0,019.

Zusatz. 8. Jeder Dezimalbruch läßt sich in der Form eines gemeinen Bruchs darstellen. So ist z. B. $0{,}3 = \frac{3}{10}$; $2{,}7 = 2 + \frac{7}{10} = 2\frac{7}{10} = \frac{27}{10}$; $4{,}73 = \frac{473}{100}$ u. s. w. Ueberhaupt erhält jeder Dezimalbruch die Form eines gemeinen Bruchs, wenn man das Komma wegläßt und unter die hieraus entstandene ganze Zahl die Zahl 1 mit so vielen Nullen zur Rechten ansetzt, als der gegebene Dezimalbruch Stellen hat; z. B. $5{,}347 = \frac{5347}{1000}$; $0{,}0273 = \frac{273}{10000}$.

Zusatz. 9. Zwei Dezimalbrüche sind gleichnamig, wenn sie eine gleiche Anzahl Stellen haben; z. B. 0,47 und 13,26. Zwei Dezimalbrüche, welche eine ungleiche Anzahl Stellen haben, also ungleichnamig sind, werden dadurch gleichnamig gemacht, daß man demjenigen Bruche, welcher die geringere Anzahl Stellen hat, so viele Nullen zur Rechten anhängt, bis die Anzahl der Stellen in beiden Brüchen gleich ist. Sind z. B. die Brüche 4,79 und 2,597 gegeben, so darf man nur, um beide Brüche gleichnamig zu machen, dem ersten zur Rechten eine Null beifügen. Es ist nämlich $4{,}790 = \frac{4790}{1000}$, $2{,}597 = \frac{2597}{1000}$, so daß also beide Brüche den nämlichen Nenner 1000 haben, ohne daß am Werthe des ersten Bruchs etwas geändert worden wäre (Zus. 2). Es ist also äusserst leicht zwei oder mehrere Dezimalbrüche auf einerlei Benennung zu bringen, was bei gemeinen Brüchen immer mühsam ist.

§. 87. Aufgabe.

Dezimalbrüche zu addiren.

Auflösung.

Man setze die Dezimalbrüche so unter einander, daß bloß Ziffern von gleichem Lokalwerthe unter einander zu stehen kommen, was am Leichtesten dadurch geschieht, daß man die Einerzeichen genau unter einander setzt; addire sodann wie bei ganzen Zahlen (§. 28), und setze in der Summe das Einerzeichen unter das der Summanden.

Beispiel.

I.		II.	
	7,5684;		5,84596
	2,3045		2,347
	3,4798		0,0594
	19,2053		7,68
	0,5674		9,534
	33,1254		25,46636.

Im zweiten Beispiele haben die Brüche eine ungleiche Anzahl Dezimalstellen und sind daher ungleichnamig; sie können jedoch nach §. 86. Zus. 9. gleichnamig gemacht werden. Das zweite Beispiel würde sich sodann auf folgende Weise darstellen:

5,84596
2,34700
0,05940
7,68000
9,53400
25,46636.

Da man nun aber die nämliche Summe erhält, man mag den Brüchen zur Rechten Nullen anhängen oder nicht, so läßt man diese in der Regel weg; so

daß man also bei der Addition der Dezimalbrüche gar nicht darauf zu sehen hat, ob sie gleichnamig sind oder nicht.

§. 88. Aufgabe.

Dezimalbrüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

Man setze den Subtrahenden so unter den Minuenden, daß die Einerzeichen gerade unter einander stehen, wodurch bloß Ziffern von gleichem Lokalwerthe unter einander zu stehen kommen, subtrahire sodann wie bei ganzen Zahlen (§. 33) und setze im Reste das Einerzeichen unter das des Minuenden und Subtrahenden.

Beispiele.

I.	5,327463;	II.	4,056
	4,756826		2,3847653
	0,570637		1,6712347

Im zweiten Beispiele hat zwar der Minuend weniger Stellen als der Subtrahend; man kann ihm jedoch zur Rechten so viele Nullen anhängen oder wenigstens ihm angehängt denken, daß er mit dem Subtrahenden gleichnamig wird.

Beispiele.

1) 573,25896 — 492,46837 = 80,79059.

2) 4,968 — 0,4937065 = 4,4742935.

3) 5 — 4,79800367 = 0,20199633.

§. 89. Aufgabe.

Einen Dezimalbruch mit einem Dezimalbruche zu multipliziren.

Auflösung.

Man multiplizire wie bei ganzen Zahlen (§. 43), ohne sich um die Einerzeichen zu bekümmern, und schneide im Produkte von der Rechten gegen die Linke so viele Stellen ab, als deren die beiden Faktoren zusammengenommen haben.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 4{,}768 \\ 2{,}56 \\ \hline 28608 \\ 23840 \\ 9536 \\ \hline 12{,}20608 \end{array}$$

Beweis.

Giebt man den Dezimalbrüchen die Form von gemeinen Brüchen (§. 86. Zus. 8), so hat man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner zu multipliziren. (§. 81.) Nun ist z. B. $4{,}768 = \frac{4768}{1000}$ und $2{,}56 = \frac{256}{100}$; also $4{,}768 \times 2{,}56 = \frac{4768}{1000} \times \frac{256}{100} = \frac{1220608}{100000}$ $= 12{,}20608$ (§. 86. Zus. 7), so daß man also das nämliche Produkt wieder erhält, welches nach dem in der Auflösung gezeigten Verfahren abgeleitet worden ist.

Beispiel.

$$\begin{array}{r} 0{,}847296 \\ 0{,}08437 \\ \hline 5931072 \\ 2541888 \\ 3389184 \\ 6778368 \\ \hline 0{,}07148636352 \end{array}$$

Da die beiden Faktoren zusammen 11 Dezimalstel-

len haben, das erhaltene Produkt aber 7148636352 nur 10 Ziffern hat, so hat man zur Linken desselben 2 Nullen anzusetzen, um nicht nur im Produkte die erforderlichen 11 Stellen, sondern auch noch eine Null für die Stelle der Ganzen zu erhalten. (Vergl. §. 81. Zus. 8.)

Zusatz. Wenn ein Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl multiplizirt werden soll, so verfahre man wie bei ganzen Zahlen, schneide aber im Produkte von der Rechten gegen die Linke so viele Stellen ab, als deren der Dezimalbruch enthält; z. B.

$$\begin{array}{r} 0{,}029684 \\ 38 \\ \hline 237472 \\ 89052 \\ \hline 1{,}127992 \end{array}$$

Eben so ist

$5{,}4978 \times 20 = 109{,}956$ (§. 86. Zus. 5.)

$7{,}9583 \times 900 = 7162{,}47$.

§. 90. Aufgabe.

Einen Dezimalbruch durch einen andern Dezimalbruch zu dividiren.

Erster Fall. Wenn Dividend und Divisor eine gleiche Anzahl Dezimalstellen haben.

Zweiter Fall. Wenn der Dividend weniger Stellen hat als der Divisor.

Dritter Fall. Wenn der Dividend mehr Dezimalstellen hat als der Divisor.

Auflösung für 1.

Man dividire wie bei ganzen Zahlen; z. B.

$$4{,}8 : 0{,}6 = 48 : 6 = 8.$$

Beweis.

$4{,}8 : 0{,}6 = \frac{48}{10} : \frac{6}{10} = \frac{48}{10} \cdot \frac{10}{6}$ (§. 83.) $= \frac{48}{6} = 8.$

Auflösung für 2.

Man hänge dem Dividenden zur Rechten so viele Nullen an, bis er mit dem Divisor eine gleiche Anzahl Stellen erhält, und dividire sodann wie bei ganzen Zahlen; z. B.

$$2{,}8 : 0{,}07 = 2{,}80 : 0{,}07 = 280 : 7 = 40.$$

Beweis.

$2{,}8 : 0{,}07 = \frac{28}{10} : \frac{7}{100} = \frac{28}{10} \cdot \frac{100}{7} = 28 \cdot \frac{10}{7} = \frac{280}{7} = 40.$

Auflösung für 3.

Man dividire wie bei ganzen Zahlen, schneide aber im Quotienten von der Rechten gegen die Linke so viele Stellen durch das Komma ab, als deren der Dividend mehr hat als der Divisor; z. B.

$$13{,}478 : 2{,}3 = 5{,}86.$$

Beweis.

$13{,}478 : 2{,}3 = \frac{13478}{1000} : \frac{23}{10} = \frac{13478}{1000} \cdot \frac{10}{23} = \frac{134780}{23000} = \frac{13478}{2300} = \frac{586}{100} = 5{,}86.$ (§. 86. Zus. 7.)

Zusatz. 1. Die beiden ersten Fälle lassen sich auf den dritten zurückführen, da man immer dem Dividenden zur Rechten Nullen anhängen kann; z. B. für den ersten Fall $0{,}04 : 0{,}08 = 0{,}040 : 0{,}08 = 0{,}5$; und für den zweiten Fall $0{,}05 : 0{,}125 = 0{,}0500 : 0{,}125 = 0{,}4$.

Zusatz. 2. Wenn ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so dividire man wie

bei ganzen Zahlen und gebe dem Quotienten so viele Stellen als deren der Dividend hat, z. B.

I. 49) 357,602{7,298
343
146
98
480
441
392
392
—

II. 734) 58,72{0,08
58 72
—

Zusatz. 3. Wenn eine ganze Zahl durch einen Dezimalbruch dividirt werden soll, so setze man nach der ganzen Zahl das Einerzeichen und diesem zur Rechten so viele Nullen als der Divisor Dezimalstellen hat. Hierauf verfahre man nach Aufl. 2 oder 3; z. B.

$$37 : 4{,}625 = 37{,}000 : 4{,}625 = 8.$$

Zusatz. 4. Auch bei Dezimalbrüchen dienen sich Multiplikation und Division gegenseitig zur Probe. (§. 53. Zus. 4 u. 5.)

I. Beispiel.

4,70296
3,9704
1881184
3292072
4232664
1410888
18,672632384

Probe.

```
3,9704) 18,672632384|4,70296
        15 8816
         2 79103
         2 77928
           117523
            79408
           381158
           357336
            238224
            238224
              —
```

II. Beispiel.

```
0,539) 0,514033520,95368
         4851
          2893
          2695
           1983
           1617
            3665
            3234
             4312
             4312
               —
```

Probe.

```
       0,95368
         0,539
      8 58 312
     28 61 04
    476 84 0
   0,514 03 352
```

§. 91. Aufgabe.

Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

1) Ist ein ächter Bruch zu verwandeln, so setze man an die Stelle der Ganzen des abzuleitenden Dezimalbruchs eine Null, löse den Zähler des gemeinen Bruchs in Zehntel auf, was dadurch geschieht, daß man zur Rechten eine Null anhängt, dividire diese mit dem Nenner und nehme den Quotienten als die Zehntel des zu findenden Dezimalbruchs. Den etwa gebliebenen Rest, der sich auf Zehntel bezieht, löse man in Hundertel auf, dividire diese mit dem Nenner, nehme den Quotienten als die Hundertel des Dezimalbruchs, und setze dieses Verfahren weiter fort. Soll z. B. der Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so erhält derselbe zunächst 0 Ganze. Den Zähler 5 löse man in Zehntel auf, so erhält man 50 Zehntel. Diese 50 dividire man durch den Nenner 8; man erhält den Quotienten 6 und den Rest 2. Den Quotienten 6 setze man als Zehntel des Dezimalbruchs an. Den Rest 2, welcher sich auf Zehntel bezieht, löse man in Hundertel auf. Man erhält 20 Hundertel. Diese dividire man durch den Nenner 8, so ergiebt sich der Quotient 2 und es bleibt der Rest 4. Den Quotienten 2 setze man an die Stelle der Hundertel des Dezimalbruchs; den Rest 4, der sich auf Hundertel bezieht, löse man in Tausendtel auf. Die so erhaltenen 40 Tausendtel dividire man durch den Nenner 8 und nehme den Quotienten 5 als die Tausendtel des Dezimalbruchs. Da nun kein neuer Rest

bleibt, so ist die Rechnung geschlossen. Es ist also
$\frac{5}{8} = 0,625$.

2) Ist ein unächter Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, so dividire man den Zähler durch den Nenner, setze den Quotienten als die Ganzen des abzuleitenden Dezimalbruchs an, löse sodann den gebliebenen Rest in Zehntel auf, dividire diese durch den Nenner des gemeinen Bruchs, und setze das Verfahren nach Nr. 1 weiter fort. Soll z. B. der unächte Bruch $\frac{15}{4}$ in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so dividire man den Zähler 15 durch den Nenner 4, setze den Quotienten als die Ganzen des Dezimalbruchs an, löse den gebliebenen Rest 3 in Zehntel auf, wodurch man 30 Zehntel erhält, dividire diese durch den Nenner 4 und nehme den Quotienten 7 als die Zehntel des Dezimalbruchs. Den gebliebenen Rest 2 löse man durch Anhängung einer Null in Hundertel auf, dividire diese 20 Hundertel durch 4 und nehme den Quotienten 5 als die Hundertel des Dezimalbruchs. Da sich nun die Rechnung schließt, so ist $\frac{15}{4} = 3,75$.

Zusatz. 1. Es ist $0,625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$; $3,75 = = \frac{375}{100} = \frac{15}{4}$.

Zusatz. 2. Wenn sich bei dem gezeigten Verfahren die Rechnung schließt, so ist der gefundene Dezimalbruch dem gegebenen gemeinen Bruche vollkommen gleich. (Zus. 1.) Bleibt aber nach jeder Division ein neuer oder wohl gar der nämliche Rest, so kann der gemeine Bruch nicht vollkommen genau in einen Dezimalbruch verwandelt werden, wiewohl man sich mit jeder folgenden Dezimalstelle dem wahren Werthe mehr annähert. Man erhält z. B. für den gemeinen Bruch $\frac{7}{318}$ den

Dezimalbruch 0,0220125786, der aber nicht vollkommen genau bestimmt ist, weil sich die Rechnung nicht geschlossen hat. Der Unterschied zwischen beiden Brüchen ist jedoch äusserst klein. Es ist nämlich

$$\frac{7}{318} - 0{,}0220125786 = \frac{7}{318} - \frac{220125786}{10000000000} =$$
$$\frac{70000000000}{3180000000000} - \frac{69999999948}{3180000000000} = \frac{52}{3180000000000}$$

Nun ist $52 < 318$, also $\frac{52}{3180000000000} < \frac{318}{3180000000000}$ d. h. kleiner als $\frac{1}{10000000000}$. Da nun aber der Werth dieses letzten Bruchs ausserordentlich klein ist, so ist der abgeleitete Dezimalbruch von dem gegebenen gemeinen Bruche $\frac{7}{318}$ so ausserordentlich wenig unterschieden, daß der Unterschied als Nichts betrachtet werden kann.

Soll ferner der gemeine Bruch $\frac{2}{3}$ in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so erhält man

```
3) 2,0|0,666
   18
   --
    20
    18
    --
     20
     18
     --
      2
```

Man sieht, daß sich die Rechnung nie schließen kann.

Zusatz. 3. Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner keine andere einfache Faktoren hat als 2 und 5 (§. 56. Zus. 1), läßt sich vollkommen genau in einen Dezimalbruch verwandeln. So ist z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2.2} \cdot \frac{5.5}{5.5} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2.2.2} \cdot \frac{5.5.5}{5.5.5} = \frac{875}{1000} = 0{,}875.$$

$$\frac{3}{125} = \frac{3}{5.5.5} \cdot \frac{2.2.2}{2.2.2} = \frac{24}{1000} = 0{,}024.$$

Enthält der Nenner eines gemeinen Bruchs einen andern einfachen Faktor als 2 und 5, z. B. 3 oder 7, so läßt er sich nicht vollkommen genau durch einen Dezimalbruch darstellen; z. B.

$$\frac{7}{18} = \frac{7}{3.3.2} = 0{,}3888 \text{ ohne Ende.}$$

Zusatz. 4. Wie viele Dezimalstellen berechnet werden müssen, um den Dezimalbruch statt des gemeinen Bruchs, ohne einen merklichen Fehler in die Rechnung zu bringen, annehmen zu dürfen, hängt von der Natur des zu behandelnden Gegenstandes ab. In den meisten Fällen sind 4 bis 5 Stellen hinreichend.

Zusatz. 5. Um anzudeuten, daß ein Dezimalbruch nicht vollkommen genau berechnet, sondern etwas zu klein ist, setze man demselben zur Rechten einige Punkte bei, z. B. $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$

Zusatz. 6. Wenn man einen Dezimalbruch z. B. bis auf 4 Stellen in Rechnung setzen will, so prüfe man noch die fünfte Stelle desselben. Ist diese 5 oder größer als 5, so vermehre man die vierte Stelle um 1. Ist z. B. der Bruch $\frac{3}{17}$ gegeben, so findet man für denselben den Dezimalbruch 0,17647.... Will man nun aber nur vier Stellen dieses Bruchs benützen, so nehme man 0,1765. Wollte man nämlich nur 0,1764 ansetzen, so wäre dieser Bruch um mehr als 7 Hunderttausendtel zu klein; der Bruch 0,1765 aber ist nicht um drei Hunderttausendtel zu groß, so daß

also der Bruch 0,1765 vom wahren Werthe weniger abweicht als 0,1764. Ist der statt des gemeinen Bruchs angenommene Dezimalbruch etwas zu groß, so dürfen zur Rechten desselben keine Punkte angesetzt werden. (Zus. 5.)

Zusatz. 7. Wenn ein gemeiner Bruch nicht vollkommen genau in einen Dezimalbruch verwandelt werden kann, so wiederholen sich entweder gleich vom Anfange an, oder erst nach einer oder mehreren Dezimalstellen die einzelnen Quotienten nach einer bestimmten Ordnung. Die in derselben Ordnung wiederkehrenden Ziffern bilden eine Periode, und ein Dezimalbruch, in welchem eine solche Periode sich findet, heißt ein periodischer. So ist z. B.

1) $\frac{2}{3} = 0,6666....$

2) $\frac{7}{11} = 0,6363....$

3) $\frac{12}{37} = 0,324324...$

4) $\frac{5}{7} = 0,7142857142857...$

5) $\frac{5}{6} = 0,8333...$

6) $\frac{7}{54} = 0,1296296...$

7) $\frac{7}{24} = 0,291666...$

Im ersten bis vierten Bruche beginnt die Periode bei der ersten Dezimalstelle. Im ersten Bruche hat die Periode nur die eine Ziffer 6; im zweiten Bruche besteht die Periode aus den Ziffern 63; die Periode des dritten Bruchs besteht aus den Ziffern 324, und die Periode des vierten Bruchs besteht aus den 6 Ziffern 714285. Im fünften Bruche beginnt die Periode bei der zweiten Stelle und hat nur die eine Ziffer 3; im sechsten Bruche beginnt die Periode gleichfalls bei der zweiten Stelle und besteht aus den drei Ziffern 296;

im siebenten Bruche beginnt die Periode erst bei der vierten Stelle und ist einziffrig.

Zusatz. 8. Wenn eine ganze Zahl in einer größern ganzen Zahl nicht ohne Rest enthalten ist, so setze man nach dem Quotienten, welcher sich auf Ganze bezieht, das Komma und löse den gebliebenen ächten Bruch in einen Dezimalbruch auf (§. 91. Auflös. 2). Vergl. §. 45. Zus. 6. Es soll z. B. 5976 durch 729 dividirt werden.

```
729) 5976|8,1975...
     5832
     ----
      1440
       729
      ----
       7110
       6561
       ----
        5490
        5103
        ----
         3870
         3645
         ----
          225
```

Zusatz. 9. Ist ein Dezimalbruch in einem Dezimalbruche nicht ohne Rest enthalten, so läßt sich die Rechnung, wenn man an jeden gebliebenen Rest, nachdem nämlich die äusserste Dezimalstelle des Dividenden herabgesetzt worden ist, eine Null anhängt, so weit man will fortsetzen. Soll z. B. der Dezimalbruch 4,7238 durch den Dezimalbruch 2,596 dividirt werden, so erhält man

```
2,596) 4,7238|1,8196...
       2 596
       2 1278
       2 0768
         5100
         2596
         25040
         23364
          16760
          15576
           1184
```

Zusatz. 10. Wenn zu einem Dezimalbruche ein gemeiner Bruch addirt werden soll, so löse man diesen in einen Dezimalbruch auf; z. B. $8{,}53 + \frac{4}{5} = 8{,}53 + 0{,}8 = 9{,}33$. Eben so ist $3{,}954 + 2\frac{4}{7} = 3{,}954 + 2{,}57142857\ldots = 6{,}52542857\ldots$

Zusatz. 11. Auf gleiche Weise ist

$5{,}27 - 3\frac{3}{4} = 5{,}27 - 3{,}75 = 1{,}52.$

$0{,}859 \times \frac{5}{8} = 0{,}859 \times 0{,}625 = 0{,}536875.$

$4\frac{5}{16} \times 0{,}592 = 4{,}3125 \times 0{,}592 = 2{,}553.$

$3{,}041 : 7\frac{1}{8} = 3{,}041 : 7{,}125 = 0{,}4268\ldots$

Zusatz. 12. Da sich gemeine Brüche ohne Schwierigkeit in Dezimalbrüche verwandeln lassen und bei der Addition der Dezimalbrüche das bei den gemeinen Brüchen mühsame Verfahren, die Brüche auf einerlei Benennung zu bringen, wegfällt, so wird, wenn viele gemeine Brüche, besonders mit großen Nennern, addirt werden sollen, die Rechnung beträchtlich vereinfacht, wenn man die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandelt. Um sich hievon zu überzeugen, addire man folgende Brüche $\frac{7}{13}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{19}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{9}{37}$

nach §. 77; sodann verwandle man aber auch die gegebenen Brüche in Dezimalbrüche und verfahre nach §. 87. Zur zweiten Rechnung wird kaum der dritte Theil der Zeit nothwendig seyn, welche auf die erste Rechnung verwendet werden mußte. Da überhaupt die Rechnung mit Dezimalbrüchen sehr einfach ist, so macht man von denselben in allen Theilen der Mathematik häufigen Gebrauch.

§. 92. Aufgabe.

Folgende gemeine Brüche in Dezimalbrüche zu verwandeln:

$\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{64}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{7}{912}$, $4\frac{5}{9}$, $13\frac{2}{7}$, $\frac{1}{343}$, $\frac{19}{518}$.

§. 93. Aufgabe.

Einen gegebenen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung.

Erster Fall. Ist der Dezimalbruch vollständig, so verfahre man nach §. 86. Zus. 8. Eine einfachere Darstellung des so erhaltenen Bruchs ist bloß in dem Falle möglich, wenn die letzte Stelle des gegebenen Dezimalbruchs eine gerade Zahl ist oder 5; z. B. $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$; $9{,}723 = \frac{9723}{1000} = 9\frac{723}{1000}$.

Zweiter Fall. Ist der Dezimalbruch periodisch, und beginnt die Periode bei der ersten Dezimalstelle, so multiplizire man den Bruch, wenn die Periode aus einer Ziffer besteht, mit 10, und subtrahire vom Produkte den einfachen Bruch, so ist der Rest, da man den einfachen Bruch vom Zehnfachen desselben subtrahirt hat, neunmal zu groß. Man nehme also den Rest, der immer eine ganze Zahl ist, zum

Zähler und 9 zum Nenner eines gemeinen Bruchs und bringe diesen auf die kleinste Benennung. Ist die Periode des Dezimalbruchs zweiziffrig, so multiplizire man den Bruch mit 100, und subtrahire vom Produkte den einfachen Bruch. Auf diese Weise erhält man einen Rest, der 99mal zu groß ist. Man nehme also den Rest als den Zähler und 99 als den Nenner eines gemeinen Bruchs an und bringe ihn auf die kleinste Benennung.

Ist die Periode des gegebenen Dezimalbruchs dreiziffrig, so multiplizire man denselben mit 1000 und subtrahire vom Produkte den gegebenen Bruch. Da man nun den einfachen Bruch vom Tausendfachen desselben subtrahirt hat, so ist der Rest 999mal zu groß. Man nehme also den Rest als den Zähler und 999 als den Nenner eines gemeinen Bruchs an und bringe ihn auf die kleinste Benennung.

Wenn überhaupt die Periode bei der ersten Stelle beginnt, so ist der dem Komma zur Rechten stehende Dezimalbruch einem gemeinen Bruche gleich, dessen Zähler die Periode selbst und dessen Nenner eine aus so vielen Neunen (99...) bestehende Zahl ist als die Periode Ziffern hat. Soll z. B. der Dezimalbruch 0,3333... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so multiplizire man denselben, weil die Periode einziffrig ist, mit 10. Es ist 0,3333... $\times$ 10 = 3,333... Von diesem Produkte subtrahire man den gegebenen Bruch 0,333... Man erhält 3,333... — 0,333... = 3. Da man nun den Bruch zuerst mit 10 multiplizirt, hierauf aber vom Produkte

den einfachen Bruch subtrahirt hat, also vom Zehnfachen das Einfache abgeht, und somit das Neunfache übrig bleibt, so ist der Rest neunmal zu groß. Man nehme also diesen Rest als den Zähler und 9 als den Nenner eines gemeinen Bruchs an. Es ist daher 0,333... = $\frac{3}{9}$ = $\frac{1}{3}$. Eben so ist 0,999... = = 1. Soll ferner der Bruch 0,181818... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so multiplizire man denselben, weil die Periode zweiziffrig ist, mit 100. Es ist 0,181818... × 100 = 18,1818... Von diesem Produkte subtrahire man den gegebenen Bruch 0,1818... Man erhält 18,1818 — 0,1818... = 18. Da nun der gegebene Bruch zuerst mit 100 multiplizirt und von diesem Hundertfachen der einfache Bruch subtrahirt worden ist, so bleibt das 99fache des gegebenen Bruchs übrig. Man nehme also den gebliebenen Rest als den Zähler eines Bruchs, welcher 99 zum Nenner hat. Es ist also 0,1818... = $\frac{18}{99}$ = $\frac{2}{11}$.

Eben so ist 7,1212... = $\frac{712,1212... - 7,1212...}{99}$ = $\frac{705}{99}$ = $7\frac{4}{33}$.

Soll ferner der Dezimalbruch 0,531531... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so multiplizire man denselben, weil die Periode dreiziffrig ist, mit 1000 und subtrahire vom Produkte den einfachen Bruch. Es ist 0,531531... × 1000 = 531,531531... und 531,531531... — 0,531531... = 531. Diese gefundene Zahl ist offenbar das 999fache des gegebenen Bruchs. Man nehme also 531 als den Zähler und 999 als den Nenner eines gemeinen Bruchs an, so ist dieser an Werth dem gegebenen Dezimalbruche gleich,

Es ist 0,531531... = $\frac{531}{999}$ = $\frac{59}{111}$. Eben so ist 4,6363... = $\frac{463,63... - 4,63...}{99}$ = $\frac{459}{99}$ = $\frac{51}{11}$ = = $4\frac{7}{11}$.

Auf eine ähnliche Weise verfahre man, wenn die Periode des Dezimalbruchs noch mehrere Stellen enthält; z. B. 0,538461538461 = $\frac{538461}{999999}$ = $\frac{7}{13}$.

Dritter Fall. Ist der Dezimalbruch periodisch, beginnt aber die Periode nicht sogleich bei der ersten Stelle, so multiplizire man denselben mit 10, wenn die Periode bei der zweiten Stelle beginnt, mit 100, wenn die Periode bei der dritten Stelle beginnt u. s. w., wodurch man zum Produkte einen Dezimalbruch erhält, in welchem die Periode bei der ersten Stelle ihren Anfang nimmt. Nun verwandle man den zur Rechten des Einerzeichens im abgeleiteten Produkte stehenden Bruch, zu welchem man sich 0 Ganze denkt, nach dem zweiten Falle, addire den erhaltenen gemeinen Bruch zu den Ganzen, welche man durch die anfängliche Multiplikation mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. erhalten hat, verwandle die dadurch entstandene gemischte Zahl in einen unächten Bruch und dividire denselben mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w., je nachdem anfänglich der gegebene Dezimalbruch mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. multiplizirt worden ist. Soll z. B. der Dezimalbruch 0,8333... in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so multiplizire man denselben, weil die Periode bei der zweiten Stelle beginnt, mit 10. Man erhält 8,333... Nun verwandle man 0,333 in einen gemeinen Bruch, wie für den zweiten Fall gezeigt worden. Man erhält $\frac{1}{3}$.

Diesen Bruch addire man zu den 8 Ganzen, welche man durch die anfängliche Multiplikation mit 10 erhalten hat; verwandle die gemischte Zahl $8\frac{1}{3}$ in einen unächten Bruch, und dividire ihn mit 10. Es ist also

$$0,8333\ldots = \frac{8,333}{10} \text{ (§. 69. Zus. 5)} = 8\tfrac{1}{3} : 10 = \\ = \tfrac{25}{3} : 10 = \tfrac{25}{30} = \tfrac{5}{6}.$$

Ist ferner der Dezimalbruch 0,706363... in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so erhält man nach dem Bisherigen:

$$0,706363\ldots = \frac{70,6363\ldots}{100} = 70\tfrac{7}{11} : 100 = \\ = \tfrac{777}{11} : 100 = \tfrac{777}{1100}.$$

Eben so ist $2,09722\ldots$

$$= \frac{2097,22}{1000} = 2097\tfrac{2}{9} : 1000 = \frac{18875}{9} : 1000 = \\ = \tfrac{18875}{9000} = 2\tfrac{7}{72}.$$

§. 94. Aufgabe.

Folgende Dezimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln:

Für den ersten Fall: 0,75; 0,125; 2,04; 0,713;

Für den zweiten Fall: 0,555...; 0,636363...; 0,148148...; 3,285714285714...; 0,128205128205...;

Für den dritten Fall: 0,1666...; 0,2777...; 0,1333...; 0,58333...

§. 95. Vermischte Aufgaben über die Rechnungsarten mit Dezimalbrüchen.

1) (3,47892 + 5,02 − 0,994) × 7,3.

2) $(4,093 + 6,975 + 0,234 - 5,297684) \times$
$\times (14,33 - 11,978523)$.

3) $(5,723 + \frac{5}{8} - 2,73) \times (5\frac{2}{5} - 4,7)$.

4) $(5\frac{5}{6} - 4,878 + \frac{3}{4}) \cdot (5,23 - \frac{4}{5})$.

5) $(0,42 + 4,739 - \frac{7}{8}) : 1,978$.

6) $(79,2 + \frac{3}{4} - 11,2596) : (18\frac{1}{2} + 4,734)$.

7) $(0,37 - 0,001) : \frac{3}{7}$.

8) $(4,29 \times 0,348) : (5,23 : 8,96)$.

9) $(0,5936 : 4,7) : (9,25 \times 1,798)$.

Auflösung.

Zu 1) 54,785916; zu 2) 14,119010974732; zu 3) 2,5326; zu 4) 7,55315 (der Bruch $\frac{5}{6}$ ist bis zu 3 Dezimalstellen berechnet worden). Zu 5) 2,1658...; zu 6) 2,95646...; zu 7) 0,861...; zu 8) 2,55768... (Der Divisor ist auf 4 Stellen berechnet worden.) Zu 9) 0,00759389...

Sechster Abschnitt.

Von den benannten Zahlen und den Rechnungsarten mit denselben.

---

§. 96. Erklärungen.

a) Eine benannte Zahl (§. 7. b.) heißt **einfach** benannt, wenn sie bloß Einheiten der nämlichen Art enthält. So sind z. B. 12 Thaler, 14 Gulden u. s. w. einfache benannte Zahlen.

b) Enthält aber ein Ausdruck, der sich auf benannte Zahlen bezieht, Einheiten höherer und niedrigerer Art, so heißt derselbe eine **zusammengesetzte** benannte Zahl; z. B. 4 Gulden 20 Kreuzer; 7 Jahre und 3 Monate u. s. w.

§. 97. Erklärung.

Die benannten Zahlen befolgen nur in sehr wenigen Fällen das Dezimalsystem, d. h. nur selten bilden jede 10 Einheiten einer niedrigen Art eine Einheit der nächsthöhern. So gehen z. B. 2 Heller auf einen Pfenning, 4 Pf. auf einen Kreuzer, und 60 Kreuzer auf einen Gulden. Nach dem Dezimalsysteme aber

müßten 10 Heller einen Pfenning, 10 Pfennige einen Kreuzer, und 10 Kreuzer einen Gulden geben.

Zusatz. 1. Da diese und ähnliche Eintheilungen nicht auf wissenschaftlichen Gründen ruhen, sondern willkührlich sind, so kann sie die Arithmetik nicht lehren. Man muß sich aber mit denselben bekannt machen, weil sonst Aufgaben, welche benannte Zahlen enthalten, nicht aufgelöst werden könnten. Die am Ende des Buchs befindlichen Tabellen enthalten hierüber das Nöthigste.

Zusatz. 2. Abgesehen davon, daß die benannten Zahlen nur in den wenigsten Fällen dem Dezimalsysteme folgen, werden sie wie die unbenannten Zahlen behandelt. Es ist z. B. $12 + 6 = 18$, es mögen sich beide Zahlen auf Gulden, oder Ellen, oder Pfunde oder auf irgend eine andere Einheit bestimmter Art beziehen.

§. 98. Erklärungen.

a) Diejenige Zahl, mit welcher Einheiten einer benannten Zahl multiplizirt werden müssen, um sie auf Einheiten der nächstniedrigern Art zurückzuführen, heißt Reduktionszahl. Da z. B. der Gulden 60 Kr. hat, so ist 60 die Reduktionszahl, wenn Gulden durch Kreuzer angegeben werden sollen. Wenn also gefragt wird, wie viele Kreuzer auf 3 Gulden gehen, so hat man 3 mit 60 zu multipliziren, d. h. $3 . 60 = 180$.

b) Eben so wird eine benannte Zahl durch Einheiten der nächsthöhern Art dargestellt, wenn man sie durch die Reduktionszahl dividirt. Wird z. B. gefragt, wie viele Gulden auf 240 Kr. gehen so darf man nur 240 durch die Reduktionszahl 60 dividiren.

§. 99. Aufgabe.

Eine zusammengesetzte benannte Zahl z. B. Fl. 48 22 Kr., 2 Pf. durch Einheiten der niedrigsten Art, nämlich durch Pfennige darzustellen.

Auflösung.

1) Man löse die 48 Gu den durch Multiplikation mit 60 in Kreuzer auf; 48 . 60 = 2880, und addire zum Produkte die in der gegebenen benannten Zahl enthaltenen 22 Kreuzer Es ist 2880 + 22 = 2902 Kr.

2) Diese 2902 Kr. löse man durch Multiplikation mit der Reduktionszahl 4 in Pfennige auf, und addire zum Produkte die in der gegebenen benannten Zahl enthaltenen 2 Pfennige. Man erhält 11610 Pf.

3) Es ist also Fl. 48, 22 Kr., 2 Pf. = 11610 Pf.

Zusatz. 1. Die Reduktion einer zusammengesetzten benannten Zahl auf Einheiten der niedrigsten Art wird gewöhnlich auf folgende Weise vorgenommen. Sollen z. B. Fl. 512, 38 Kr., 3 Pf., 1 Heller durch lauter Heller dargestellt werden, so setze man

```
   512
    60
------
 30720
    38
------
 30758 Kr.
     4
------
123032
     3
------
123035 Pf.
     2
------
246070
     1
------
246071 Heller.
```

Zusatz. 2. Man kann bei einer solchen Reduktion die Addition mit der Multiplikation zur Vereinfachung der Rechnung verbinden. Soll man z. B. Fl. 59, 18 Kr. durch lauter Kreuzer darstellen, so setze man

Fl. 59 » 18 Kr.
60
3558 Kr.

Sollen ferner 24 Thaler 19 Gr. 5 Pf. Sächsisch auf Pfennige reduzirt werden, so setze man

Thlr. Gr. Pf.
24 » 19 » 5
24
115
48
595
12
1195
595
7145 Pf.

Zusatz. 3. Sind Einheiten einer niedrigen Art z. B. Pfennige durch Einheiten höherer Art, also durch Kreuzer und Gulden darzustellen, so dividire man zuerst mit der Reduktionszahl 4, um Kreuzer zu erhalten, und diese mit 60, um Gulden abzuleiten. Sind z. B. 74504 Pf. durch Kreuzer und Gulden darzustellen, so verfahre man, wie folgt:

4) 74504 Pf.
6|0) 1862|6 Kr.
310 Fl. 26 Kr.

Ferner

4) 95025 Pf.
6|0) 2375|6 Kr. 1 Pf.
395 Fl. 56 Kr. 1 Pf.

Sollen ferner 68508 Pf. Sächsisch durch Groschen und Thaler dargestellt werden, so ist

12) 68508 Pf.
24) 5709 Grosch.
237 Thlr. 21 Gr.

Ferner 3566 Quint bayerisches Handelsgewicht sollen durch Einheiten höherer Art dargestellt werden. Es ist 4) 3566 Quint

32) 891 Loth 2 Quint
27 Pfund 27 Loth 2 Quint.

§. 100. Aufgabe.

Zusammengesetzte benannte Zahlen zu addiren.

Auflösung.

1) Man setze die zu addirenden Zahlen so an, daß bloß gleichnamige Größen unter einander und die Ziffern, welche sich auf Einheiten der niedrigsten Art beziehen, am Weitesten zur Rechten zu stehen kommen.

2) Man addire von der Rechten gegen die Linke jede einzelne Reihe, und setze die gefundene Summe, wenn nicht in ihr eine oder gar mehrere Einheiten der nächsthöhern Ordnung enthalten sind, unter die Reihe;

z. B. Guld. Kr. Pf.

Guld.	Kr.	Pf.
24 »	27 »	1
52 »	18 »	2
76 »	45 »	3

3) Enthält die Summe aus den Gliedern einer Reihe eine oder mehrere Einheiten der nächsthöhern Ordnung, so bestimme man dieselben nach §. 98. b., und addire sie zu den Einheiten dieser Art; z. B.

Guld.		Kr.		Pf.
45	»	12	»	3
6	»	24	»	2
5	»	38	»	1
7	»	52	»	1
65	»	7	»	3

Zusatz. Nur gleichartige benannte Zahlen lassen sich unmittelbar zu einem Ganzen verbinden. So sind z. B. 4 Gulden + 7 Gulden = 11 Gulden; aber 7 Ellen + 5 Gulden giebt weder 12 Ellen noch 12 Gulden.

Aufgaben.

I. Thlr. Gr. Pf. (Sächs.)

Thlr.		Gr.		Pf.
7	»	18	»	3
5	»	14	»	8
9	»	17	»	2
12	»	21	»	7

II. Fuß Zoll Linie Skrupel (Dezimalm.)

Fuß		Zoll		Linie		Skrupel
19	»	7	»	8	»	5
42	»	9	»	4	»	7
18	»	1	»	0	»	9
72	»	0	»	9	»	8

§. 101. Aufgabe.

Zusammengesetzte benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man setze den Subtrahenden so unter den Minuenden, daß bloß gleichnamige Größen unter einander zu stehen kommen.

2) Man subtrahire von den Einheiten der niedrigsten Art an jede Ziffer des Subtrahenden von der darüberstehenden Ziffer des Minuenden, und setze den Rest unter die treffende Stelle; z. B.

Guld.	Kr.	Pf.
48 »	54 »	3
27 »	39 »	2
21 »	15 »	1

3) Enthält an einer Stelle der Minuend weniger Einheiten als der Subtrahend, so entlehne man von den Einheiten der nächsthöhern Art im Minuenden eine Einheit, und löse sie in Einheiten der nächstniedrigern Art auf; z. B.

Guld.	Kr.
19 »	12
5 »	51
13 »	21

Die 51 Kr., welche im Subtrahenden stehen, können von den 12 Kr. im Minuenden nicht weggenommen werden. Man entlehne also von der Zahl, welche sich im Minuenden auf Gulden d. h. auf Einheiten der nächsthöhern Art bezieht, eine Einheit und löse sie in Kreuzer auf. Diese 60 Kr. machen mit den 12 Kr., welche im Minuenden stehen, 72 Kr. Werden nun von diesen die 51 Kr. des Subtrahenden weggenommen, so bleiben 21 Kr. übrig. Da von den 19 Gulden im Minuenden 1 Gulden entlehnt worden ist,

so stehen im Minuenden nur noch 18 Gulden, und nimmt man von diesen die 5 Gulden des Subtrahenden weg, so bleiben 13 Gulden.

Sollen ferner von 32 Gulden subtrahirt werden 14 Gulden, 15 Kr., 3 Pf., so erhält man

Guld.	Kr.	Pf.
32 »	— »	—
14 »	15 »	3
17 »	44 »	1

Da der Minuend weder Kreuzer noch Pfennige enthält, so entlehne man von den 32 Gulden des Minuenden einen Gulden und löse ihn in 60 Kreuzer auf. Von diesen 60 Kr. nehme man einen und löse ihn in 4 Pfennige auf. Die Subtraktion läßt sich sodann leicht vornehmen.

Zusatz. 1. Nur gleichartige benannte Zahlen lassen sich von einander subtrahiren; z. B. 7 Thaler — 2 Thaler = 5 Thaler; 9 Pfunde — 4 Ellen giebt weder 5 Pfunde, noch 5 Ellen.

Zusatz. 2. Auch bei benannten Zahlen dienen sich die Addition und Subtraktion gegenseitig zur Probe.

Aufgaben.

1) (35 Gulden, 2 Kr., 1 Pf.) — (26 Gulden, 54 Kreuzer, 3 Pf.

2) (18 Thaler, 15 Grosch., 3 Pf.) — (4 Thaler, 22 Grosch. 8 Pf.)

3) (24 Jahre, 4 Monate, 3 Tage) — 17 Jahre, 8 Monate, 23 Tage.)

4) (57 Fuß — Zoll, 3 Linien) — (38 Fuß, 8 Zoll, 7 Linien.)

§. 102. Aufgabe.

Eine zusammengesetzte benannte Zahl mit einer unbenannten Zahl zu multiplizíren.

Auflösung.

1) Man multiplizire von den niedrigsten Einheiten an alle Theile der benannten Zahl; z. B.

Guld.	Kr.	Pf.
54 »	13 »	1
		2
108 »	26 »	2

2) Enthält ein Produkt eine oder mehrere Einheiten der nächsthöhern Art, so bestimme man diese nach §. 98. b. und nehme sie zu dem folgenden Produkte; z. B.

Guld.	Kr.	Pf.
5 »	28 »	3
		9
49 »	18 »	3

Es ist nämlich 3 Pf. $\times$ 9 = 27 Pf. = 6 Kr. + 3 Pf. Man setze also bloß 3 Pf. an und nehme die 6 Kr. zu dem folgenden Produkte. Es ist 28 Kr. $\times$ 9 = 252 Kr.; zu diesen die im ersten Produkte enthaltenen 6 Kr. addirt, giebt 258 Kr. = 4 Gulden + 18 Kr. Man setze also 18 Kr. an und nehme die 4 Gulden zum folgenden Produkte.

Zusatz. Der Multiplikator ist immer eine unbenannte Zahl. So kann man z. B. 4 Gulden gar wohl mit irgend einer unbenannten Zahl z. B. mit 3 multiplizíren, aber 4 Gulden lassen sich nicht 3 Pfundemal oder 7 Ellenmal u. s. w. nehmen. Wenn gefragt wird, was 7 Pfunde einer Waare koste,

wenn das Pfund zu 3 Gulden 14 Kr. gerechnet ist, so will man lediglich das Siebenfache von 3 Gulden 14 Kr. wissen. Man multiplizire also mit der unbenannten Zahl 7, (nicht mit 7 Pfunden, was keinen Sinn hätte). Das Produkt ist mit dem Multiplikanden gleichartig. Man erhält (3 Gulden 14 Kr.) . 7 = Guld. 22, 38 Kr.

Aufgaben.

1) (9 Fuß, 4 Zoll, 7 Linien) . 38.

2) (14 Thaler, 18 Gr., 2 Pf.) [Sächsisch] . 49.

3) (7 Pfund, 8 Unzen, 3 Drachmen, 2 Skrupel) . 73.

§. 103. Aufgabe.

Eine zusammengesetzte benannte Zahl durch eine unbenannte Zahl zu dividiren.

Auflösung.

1) Man dividire die Einheiten der höchsten Art und setze den Quotienten an. Bleibt ein Rest, so löse man ihn in Einheiten der nächstniedrigeren Art auf und addire sie zu den in der benannten Zahl gegebenen Einheiten dieser Art.

2) Die Summe dieser Einheiten dividire man auf's Neue durch den gegebenen Divisor, und verfahre wie Nr. 1.

3) Der Quotient ist mit dem Dividenden gleichartig.

I. Beispiel.

Man soll 512 Gulden, 19 Kr., 2 Pf. durch 6 dividiren.

Auflösung.

	Guld.	Kr.	Pf.
6)	512 »	19 »	2
	85 »	23 »	1

Theilt man nämlich 512 Gulden durch 6, so erhält man 85 Gulden und es bleibt der Rest 2 Gulden. Diesen löse man in 120 Kr. auf und addire dazu die in der benannten Zahl enthaltenen 19 Kr. Die Summe 139 Kr. dividire man wieder durch 6. Man erhält den Quotienten 23 Kr. und es bleibt der Rest 1 Kr. Diesen Rest löse man in 4 Pfennige auf und addire dazu die in der benannten Zahl enthaltenen 2 Pfennige. Die Summe 6 Pfennige dividire man mit dem Divisor 6 und setze den Quotienten 1 Pfennig an.

II. Beispiel.

Man soll 516 Thaler, 3 Groschen Sächsisch durch 9 dividiren.

Auflösung.

	Thaler.	Groschen.	
9)	516 »	3	
Thaler	57 »	8 »	4 Pf.

Zusatz. 1. Soll eine zusammengesetzte benannte Zahl mit einem Bruche multiplizirt werden, so multiplizire man sie mit dem Zähler und dividire das Produkt durch den Nenner; z. B.

$$(5 \text{ Guld. } 36 \text{ Kr.}) \cdot \frac{7}{8} = \frac{39 \text{ Guld. } 12 \text{ Kr.}}{8} = 4 \text{ Guld. } 54 \text{ Kr.}$$

Zusatz. 2. Soll eine benannte Zahl mit einer gemischten Zahl multiplizirt werden, so verwandle man diese in einen unächten Bruch und verfahre nach Zus. 1.

z. B.

(3 Guld. 14 Kr.) $2\frac{1}{3}$ = (3 Guld. 14 Kr.) $\frac{7}{3}$ = $\frac{22\ \text{Guld.}\ 38\ \text{Kr.}}{3}$ = 7 Guld. $32\frac{2}{3}$ Kr.

Zusatz. 3. Soll eine benannte Zahl mit einem Bruche dividirt werden, so kehre man denselben um und verfahre nach Zusatz 1 (§. 83. Zus. 2); z. B.

(24 Guld. 16 Kr.) : $\frac{5}{9}$ = (24 Guld. 16 Kr.) $\times\ \frac{9}{5}$ = 43 Guld. $40\frac{4}{5}$ Kr.

Zusatz. 4. Soll eine benannte Zahl mit einer gemischten Zahl dividirt werden, so verwandle man diese in einen unächten Bruch und verfahre nach Zusatz 3; z. B.

(14 Fuß, 8 Zoll, 2 Lin.) [Dez.] : $1\frac{1}{4}$ = (14 Fuß, 8 Zoll, 2 Lin.) : $\frac{5}{4}$ = 14 Fuß, 8 Zoll, 2 Lin.) . $\frac{4}{5}$ = $\frac{59\ \text{Fuß},\ 2\ \text{Zoll},\ 8\ \text{Lin.}}{5}$ = 11 Fuß, 8 Zoll, 5 Lin., 6 Sk.

Zusatz. 5. Bei der Division benannter Zahlen kann auch der Divisor eine benannte Zahl seyn. Es soll z. B. untersucht werden, wie oft 7 Gulden 12 Kr. in 36 Gulden enthalten sind. Man löse den Dividenden und Divisor in Einheiten der nämlichen Art, also im gegebenen Falle in Kreuzer, auf, und dividire sodann wie bei ganzen Zahlen. Der Quotient ist eine unbenannte Zahl. Es ist 36 Gulden : (7 Guld. 12 Kr.) = 2160 : 432 = 5. Soll ferner untersucht werden, wie oft 22 Groschen 7 Pf. Sächsisch in 104 Thalern 8 Gr. enthalten sind, so löse man Dividend und Divisor in Pfennige auf. Es ist 104 Thlr. 8 Gr.) : (22 Gr. 7 Pf.) = 30048 : 271.

Zusatz. 6. Lassen sich Dividend und Divisor in Einheiten der nämlichen Art nicht auflösen, so behandle man den Divisor als eine unbenannte Zahl, so daß also der Quotient mit dem Dividenden gleichartig wird. Fragt man z. B. nach dem Preise einer Elle, wenn 8 Ellen 27 Gulden 48 Kr. gekostet haben, so will man lediglich den achten Theil von 27 Guld. 48 Kr. erfahren. Man dividire also 27 Guld. 48 Kr. mit 8, (nicht mit 8 Ellen, was keinen Sinn hätte).

Zusatz. 7. Auch bei benannten Zahlen dienen sich die Multiplikation und Division gegenseitig zur Probe.

Aufgaben.

1) (35 Guld., 22 Kr., 3 Pf.) . $35\frac{1}{2}$.
2) (28 Guld., 45 Kr., 2 Pf., 1 Heller) . $47\frac{2}{3}$.
3) (4 Thaler, 5 Gr., 2 Pf.) . $27\frac{2}{7}$.
4) (127 Fuß, 8 Zoll, 5 Lin., 3 Skrupel) : 12.
5) (314 Pfund, 17 Loth, 3 Quint) : $\frac{7}{8}$.
6) (55 Thaler, 21 Gr., 7 Pf.) : $2\frac{5}{6}$.

§. 104. Aufgabe.

Eine zusammengesetzte benannte Zahl z. B. 4 Guld. 22 Kr. 2 Pf. in einen Dezimalbruch zu verwandeln.

Auflösung.

1) Man setze die 4 Gulden als Ganze an.

2) Da 1 Kr. = $\frac{1}{60}$ Gulden, so sind 22 Kr. = $\frac{22}{60}$ Gulden.

3) Da 1 Pf. = $\frac{1}{4}$ Kr., so sind 2 Pf. = $\frac{1}{2}$ Kr. = $\frac{1}{60}$ Gulden $\times \frac{1}{2}$ = $\frac{1}{120}$ Gulden.

4) Nun addire man $\frac{22}{60}$ und $\frac{1}{120}$ und löse die Summe in einen Dezimalbruch auf. (§. 91.)

Es ist $\frac{22}{60} + \frac{1}{120} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} = 0,375$.

5) Es sind also 4 Guld., 22 Kr., 2 Pf. = 4,375 Gulden.

Zusatz. Wenn sich eine zusammengesetzte benannte Zahl nicht vollkommen genau durch einen Dezimalbruch darstellen läßt, so ist es in den meisten Fällen hinreichend, wenn 4 Dezimalstellen berechnet werden.

Aufgaben.

Folgende benannte Zahlen sollen in Dezimalbrüche aufgelöst werden:

1) 4 Gulden 15 Kr.

2) 98 Thaler, 16 Groschen, 4 Pf.

3) 7 Jahre, 7 Monate.

4) 3 Pfund, 22 Loth, 3 Quint.

§. 105. Aufgabe.

Die Dezimalstellen eines Dezimalbruchs, welcher sich auf eine benannte Zahl bezieht, durch Unterabtheilungen derselben auszudrücken. Man soll z. B. 57,2818 Gulden durch Gulden, Kreuzer, Pfennige und Heller darstellen.

Auflösung.

1) Man setze die 57 Ganzen als Gulden an.

2) Die $\frac{2818}{10000}$ Gulden (§. 86. Zus. 8.) reduzire man auf Kreuzer. Dieß giebt $\frac{169080}{10000} = \frac{16908}{1000} = 16\frac{908}{1000}$ Kr.

3) Die 16 Kr. setze man an, und reduzire die $\frac{908}{1000}$ Kr. auf Pfennige. Man erhält $\frac{3632}{1000} = 3\frac{632}{1000}$ Pf.

4) Die 3 Pf. setze man an, und reduzire die

$\frac{632}{1000}$ Pf. auf Heller. Dieß giebt $\frac{1264}{1000} = 1\frac{264}{1000}$ Heller.

5) Es ist also 57,2818 Gulden = 57 Gulden, 16 Kr., 3 Pf., 1 Heller.

Zusatz. Gewöhnlich verfährt man auf folgende Weise.

	57,2818 Gulden
	60
Kreuzer	16|9080
	4
Pfennige	3|6320
	2
Heller	1|2640

Aufgaben.

1) Wie viele Jahre, Monate und Tage enthält der Dezimalbruch 17,4587?

2) Wie viele Preussische Thaler, Groschen und Pf. enthält der Dezimalbruch 49,27856?

3) Wie viele Pfunde, Lothe und Quinte enthält der Dezimalbruch 52,87465?

§. 106. Gemischte Aufgaben.

1) Ludwig Karl August, König von Bayern, wurde den 25. August 1786 geboren, und bestieg den Thron in einem Alter von 39 Jahren, 1 Monat und 18 Tagen. Wann trat Er seine Regierung an?

Auflösung.

Die Frage wird dadurch beantwortet, daß man die beiden auf die Zeit sich beziehenden Zahlen addirt. Nun ist der August der achte Monat des Jahrs, also

Jahr.		Monate.		Tage.
1786	»	8	»	25
39	»	1	»	18
1825	»	10	»	13

Da nun der zehnte Monat des Jahres der October ist, so findet man als Antwort auf die gestellte Frage: Den 13ten October 1825.

Zusatz. Bei ähnlichen Aufgaben wird ein Monat zu 30 Tagen angenommen.

2) Friedrich II., König von Preussen, wurde geboren den 24. Januar 1712, und erreichte ein Alter von 74 Jahren, 7 Monaten und 23 Tagen. Wann ist er gestorben?

3) Friedrich von Schiller wurde den 10ten Nov. 1759 geboren und starb 45 Jahre, 5 Monate und 29 Tage alt. In welchem Jahre und an welchem Tage ist er gestorben?

4) Maximilian Joseph I., geboren den 27ten Mai 1756 gab Bayern eine Konstitution den 27ten Mai 1818. Wie alt war Er damals?

5) Dieser glorreiche Regent ist gestorben den 12ten October 1825. Wie alt ist Er geworden?

6) Karl V. ist gestorben den 21. September 1558; Peter der Große den 25. Januar 1725. Wie viele Jahre, Monate und Tage ist also Karl früher gestorben als Peter?

7) Die Sizilianische Vesper ereignete sich den 30. März 1282; die Pariser Bluthochzeit den 24. August 1572. Um wie viel später fiel also diese?

8) Die Schlacht bei Roßbach wurde am 5. November 1757, die Schlacht bei Austerlitz den 2ten

Dezember 1805 geliefert. Wie viel später war die letztere?

9) 33 Pfunde, 9 Unzen, 3 Drachmen und 2 Skrupel sollen mit 14 multiplizirt werden.

10) 7 Fuß, 8 Zoll, 7 Linien (Dezimalmaaß) soll man mit $28\frac{3}{4}$ multipliziren.

11) 15 Thaler, 14 Grosch., 7 Pf. sollen durch 38 dividirt werden.

12) 135 Gulden, 3 Kr., 2 Pf., 1 Heller sollen durch $23\frac{2}{3}$ dividirt werden.

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

A) Von den Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

§. 107. Erklärungen.

a) Wenn man zwei Dinge von der nämlichen Art in Beziehung auf ihre Größe mit einander vergleicht, also diese Dinge durch Zahlen darstellt, so setzt man dieselben in ein Verhältniß.

b) Sind die verglichenen Dinge einander gleich, so hört, in so fern lediglich von ihrer Größe die Rede ist, jede weitere Vergleichung auf, und man sagt, sie stehen im Verhältnisse der Gleichheit. Sind aber die verglichenen Größen ungleich, so kann untersucht werden

1) um wie viel die zweite Größe größer oder kleiner ist als die erste,
2) wie vielmal die zweite Größe größer oder kleiner ist als die erste, oder, mit andern Worten, wie oft die erste Größe in der zweiten enthalten ist.

Sind z. B. die Zahlen 2 und 8 gegeben, so läßt sich das Verhältniß derselben dadurch ausdrücken, daß

man sagt: 8 ist um 6 größer als 2. Man kann aber auch das Verhältniß der Zahlen 2 und 8 dadurch angeben, daß man sagt: 8 ist viermal so groß als 2, oder 2 ist in 8 viermal enthalten.

c) Durch die erste Art, zwei Größen zu vergleichen, bestimmt man das sogenannte arithmetische, durch die zweite Art das sogenannte geometrische Verhältniß.

d) Die beiden Größen, welche man vergleicht, heißen die Glieder des Verhältnisses, und zwar heißt die Zahl, welche zuerst betrachtet oder gesetzt wird, das Vorderglied, und die zweite Zahl das Hinterglied des Verhältnisses.

e) Ein Verhältniß heißt zunehmend, wenn das Hinterglied größer ist als das Vorderglied, und abnehmend, wenn das Hinterglied kleiner ist als das Vorderglied.

Anmerkung. Unter einem Verhältnisse ohne Beisatz hat man immer das geometrische zu verstehen.

§. 108. Erklärung.

Wenn zwei Größen in ein arithmetisches Verhältniß gesetzt werden, so sucht man die Differenz, welche zwischen den Größen Statt findet. Das arithmetische Verhältniß besteht also in der Vergleichung zweier Größen durch Subtraktion (§. 30). Man deutet daher auch das arithmetische Verhältniß zweier Größen durch das Zeichen der Subtraktion an. Sind z. B. die Zahlen 2 und 7 arithmetisch zu vergleichen, so setzt man 2 — 7, was hier nicht 2 minus 7, sondern 2 verhält sich zu 7 ausgesprochen wird.

Zusatz. 1. Da das arithmetische Verhältniß durch die Differenz zwischen den Gliedern desselben bestimmt wird, also von der Differenz abhängt, so sind zwei arithmetische Verhältnisse, welche gleiche Differenzen haben, einander gleich.

Zusatz. 2. Zwei gleiche arithmetische Verhältnisse haben gleiche Differenzen.

Zusatz. 3. Man kann dem arithmetischen Verhältnisse unbeschadet zu den beiden Gliedern Gleiches addiren, oder von den Gliedern Gleiches subtrahiren. (§. 31. Zus.)

§. 109. Erklärung.

Wenn zwei Größen in ein geometrisches Verhältniß gesetzt werden, so sucht man die Zahl, welche angiebt, wie oft das erste Glied in dem zweiten enthalten ist. Diese Zahl nennt man den Exponenten des Verhältnisses. Da also bei dem geometrischen Verhältnisse die Vergleichung der Größen mittelst der Division geschieht (§. 45), so wird dasselbe durch das Zeichen der Division angedeutet. So heißt, wenn von Verhältnissen die Rede ist, der Ausdruck 4 : 8 (4 verhält sich zu 8), man soll das geometrische Verhältniß zwischen 4 und 8 angeben. Der Exponent dieses Verhältnisses ist 2.

Zusatz. 1. Da die Größe eines geometrischen Verhältnisses durch den Exponenten bestimmt ist, also von diesem abhängt, so sind zwei Verhältnisse, welche gleiche Exponenten haben, einander gleich. Das Verhältniß 4 : 8 ist dem Verhältnisse 6 : 12 gleich, weil beide den Exponenten 2 haben.

Zusatz. 2. Zwei gleiche geometrische Verhältnisse haben gleiche Exponenten.

Zusatz. 3. Man kann dem geometrischen Verhältnisse unbeschadet beide Glieder mit der nämlichen Zahl multipliziren oder dividiren (§. 49. Zus. 3.)

Zusatz. 4. Zwei gleichnamige Brüche verhalten sich wie ihre Zähler. So ist z. B. das Verhältniß $\frac{2}{11} : \frac{7}{11}$ dem Verhältnisse 2 : 7 gleich. (Zus. 3.) Ist das Verhältniß zweier ungleichnamiger Brüche zu bestimmen, so bringe man sie auf einerlei Benennung; z. B. $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{20}{35} : \frac{21}{35} : = 20 : 21$. Eben so ist $3 : \frac{2}{3} = 9 : 2$; ferner $4\frac{1}{2} : 21 = \frac{9}{2} : 21 = 9 : 42 = 3 : 14$.

Zusatz. 5. Die Glieder eines jeden geometrischen Verhältnisses lassen sich durch ganze Zahlen darstellen. (Zus. 3.)

Zusatz. 6. Man erhält den Exponenten eines Verhältnisses, wenn man das zweite Glied durch das erste dividirt. Der Exponent des Verhältnisses 3 : 12 ist 4; das Verhältniß 4 : 7 hat den Exponenten $\frac{7}{4}$; das Verhältniß 9 : 7 hat den Exponenten $\frac{7}{9}$. Im zunehmenden Verhältnisse ist also der Exponent eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch; im abnehmenden Verhältnisse ist der Exponent ein ächter Bruch.

Zusatz. 7. Das Hinterglied eines geometrischen Verhältnisses läßt sich als das Produkt aus dem Vordergliede in den Exponenten betrachten. Ist z. B. das Verhältniß 5 : 15, dessen Exponent = 3 ist, gegeben, so erhält man das Hinterglied 15, wenn man das Vorderglied 5 mit dem Exponenten 3 multiplizirt.

§. 110. Grundsatz.

Zwei Verhältnisse, die einem dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

§. 111. Erklärungen.

a) Wenn zwei gleiche arithmetische oder geometrische Verhältnisse einander gleichgesetzt werden, so entsteht dadurch eine Proportion. Durch Gleichsetzung zweier arithmetischer Verhältnisse entsteht eine arithmetische, durch Gleichsetzung zweier geometrischer Verhältnisse eine geometrische Proportion. So ist z. B. 4 — 7 = 6 — 9 eine arithmetische Proportion: die beiden Verhältnisse haben die nämliche Differenz 3 und sind also einander gleich; 3 : 9 = 4 : 12 ist eine geometrische Proportion: beide Verhältnisse haben den nämlichen Exponenten 3 und sind also einander gleich. Die Proportion 4 — 7 = 6 — 9 wird ausgesprochen: vier verhält sich zu 7 wie sich 6 zu 9 verhält, oder gewöhnlicher und kürzer 4 zu 7 wie 6 zu 9. Eben so ist der wörtliche Ausdruck für die Proportion 3 : 9 = 4 : 12 folgender: 3 verhält sich zu 9 wie 4 zu 12, oder 3 zu 9 wie 4 zu 12.

b) In jeder Proportion heißen das erste und vierte Glied zusammengenommen äußere Glieder; das zweite und dritte Glied zusammengenommen mittlere Glieder; das erste und dritte Glied zusammengenommen Vorderglieder; das zweite und vierte Glied zusammengenommen Hinterglieder. Die Vorderglieder zusammengenommen, so wie auch die Hinterglieder zusammengenommen heißen gleichnamige oder homologe Glieder.

c) Sind die mittleren Glieder einer Proportion verschieden, so heißt sie diskret; sind die mittleren Glieder einander gleich, so heißt sie stetig; z. B.

4 — 7 = 9 — 12 und
3 : 6 = 7 : 14 sind diskrete; dagegen
5 — 8 = 8 : 11 und
6 : 18 = 18 : 54 sind stetige Proportionen.

B) Von den arithmetischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 112. Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußeren Glieder der Summe der beiden mittleren gleich.

Beweis.

1) Die arithmetische Proportion entsteht durch Gleichsetzung zweier gleicher arithmetischer Verhältnisse.

2) Zwei arithmetische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Differenzen haben. (§. 108. Zus. 1.)

3) Um so viel also das vierte Glied größer oder kleiner ist als das dritte, um so viel ist auch das zweite Glied größer oder kleiner als das erste; d. h. um so viel das eine äussere Glied größer als eines der mittleren Glieder ist, um so viel ist das andere äussere Glied kleiner als das andere mittlere Glied. Es ist also die Summe der beiden äusseren Glieder der Summe der beiden mittleren Glieder gleich.

Ist z. B. die Proportion 7 — 9 = 12 — 14 gegeben, so ist das äussere Glied 14 um 2 größer als

das mittlere Glied 12; dagegen ist das äussere Glied 7 um 2 kleiner als das andere mittlere Glied 9, folglich 7 + 14 = 9 + 12.

Ist ferner die Proportion 12 — 8 = 15 — 11 gegeben, so ist das äussere Glied 11 um 4 kleiner als das mittlere Glied 15, dagegen ist das äussere Glied 12 um 4 größer als das mittlere Glied 8, folglich 12 + 11 = 8 + 15.

Zusatz. 1. Ist die Summe der äusseren Glieder der Summe der beiden mittleren Glieder gleich, so ist die Proportion richtig, im Gegentheile falsch.

Zusatz. 2. Wenn die Summe zweier Größen der Summe zweier anderer Größen gleich ist, so erhält man eine diskrete geometrische Proportion, wenn man die Theile der einen Summe zu äusseren und die Theile der andern Summe zu mittleren Gliedern macht. Ist z. B. 5 + 16 = 9 + 12, so ist auch 5 — 9 = 12 — 16.

Zusatz. 3. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äusseren Glieder dem Duplum des mittleren Glieds gleich; z. B.

7 — 10 = 10 — 13, also
7 + 13 = 10 + 10 = 2 . 10 = 20.

Zusatz. 4. Man kann der Proportion unbeschadet die mittleren Glieder verwechseln, d. h. das dritte Glied zum zweiten und das zweite Glied zum dritten machen. Z. B. wenn 5 — 9 = 12 — 16, so ist auch 5 — 12 = 9 — 16.

Zusatz. 5. Man kann der Proportion unbeschadet die äusseren Glieder verwechseln, d. h. das vierte zum

ersten und das erste zum vierten machen. Ist 5 — 9 = 12 — 16, so ist auch 16 — 9 = 12 — 5.

Zusatz. 6. Man kann der Proportion unbeschadet die Verhältnisse umkehren, d. h. die Hinterglieder zu Vordergliedern und die Vorderglieder zu Hintergliedern machen. Wenn 5 — 9 = 12 — 16, so ist auch 9 — 5 = 16 — 12.

§. 113. Aufgabe.

Zu den drei ersten Gliedern einer diskreten arithmetischen Proportion das fehlende vierte Glied zu finden.

Auflösung.

Man subtrahire von der Summe der beiden mittleren Glieder das erste Glied, so ist der Rest das gesuchte vierte Glied.

Beweis.

Sind die drei ersten Glieder der Proportion der Ordnung nach die Zahlen z. B. 2, 5, 9, und bezeichnet man das zu berechnende vierte Glied mit X, so ist

$$2 - 5 = 9 - X, \text{ also}$$
$$X + 2 = 14 \text{ (§. 112)}$$
$$2 = 2; \text{ folglich}$$
$$X = 12 \text{ (§. 31.)}$$

Zusatz. 1. Wenn 9 — 5 = X — 17, so ist

$$X + 5 = 26$$
$$5 = 5; \text{ folglich}$$
$$X = 21;$$

d. h. man findet das dritte Glied einer arithmetischen Proportion, wenn man von der Summe der beiden äusseren Glieder das zweite Glied subtrahirt.

Zusatz. 2. Wenn $7 - X = 12 - 19$, so ist

$$X + 12 = 26$$
$$12 = 12; \text{ folglich}$$
$$X = 14;$$

d. h. man findet das zweite Glied einer arithmetischen Proportion, wenn man von der Summe der beiden äusseren Glieder das dritte Glied subtrahirt.

§. 114. Erklärung.

Unter dem arithmetischen Mittel oder der mittleren arithmetischen Proportionalzahl zwischen zwei gegebenen Zahlen versteht man die Zahl, welche die eine der gegebenen Zahlen um eben so viel übertrifft, als sie kleiner als die andere ist. So ist z. B. 7 das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen 5 und 9, weil 7 um 2 größer als 5 und um 2 kleiner als 9 ist.

Zusatz. 1. Das arithmetische Mittel zwischen zwei Zahlen findet man, wenn man ihre Summe durch 2 dividirt.

Zusatz. 2. Man findet überhaupt das arithmetische Mittel oder den Durchschnitt zwischen mehreren gegebenen Zahlen, wenn man ihre Summe durch ihre Anzahl dividirt. So ist für die Zahlen 208, 219, 199, 226 das arithmetische Mittel = 213.

Beispiele.

1) Ein Gutsbesitzer hat in 6 auf einander folgenden Jahren nachstehende Einnahme gehabt: Im ersten Jahre 932 Gulden 14 Kr.; im zweiten Jahre 1107 Guld. 55 Kr.; im dritten Jahre 968 Gulden 16 Kr.; im vierten Jahre 1022 Gulden 23 Kr.; im fünften

Jahre 907 Gulden 6 Kr.; im sechsten Jahre 882 Gulden 35 Kr. Wie viel hat er jährlich im Durchschnitte eingenommen?

Auflösung.

Der jährliche Durchschnitt ist das arithmetische Mittel zu den gegebenen Zahlen. Verfährt man also nach Zus. 2, so erhält man als Beantwortung der Frage 970 Gulden $4\frac{5}{6}$ Kr.

2) Es hat Jemand in 5 auf einander folgenden Jahren nachstehende Ausgaben gehabt: Im ersten Jahre 792 Gulden 40 Kr.; im zweiten 887 Gulden 15 Kr.; im dritten 683 Gulden 27 Kr.; im vierten 809 Gulden 14 Kr.; im fünften 772 Gulden 32 Kr. Wie viel hat er im Durchschnitte jährlich ausgegeben?

C) Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

§. 115. Lehrsatz.

In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt aus den beiden äusseren Gliedern dem Produkte aus den beiden mittleren Gliedern gleich.

Beweis.

1) Eine geometrische Proportion entsteht durch Gleichsetzung zweier gleicher geometrischer Verhältnisse (§. 111.)

2) Zwei geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben (§. 109. Zus. 1.)

3) Das zweite Glied einer Proportion ist als das Produkt aus dem ersten Gliede in den Exponenten,

so wie das vierte Glied als das Produkt aus dem dritten Gliede in den Exponenten zu betrachten (§. 109. Zus. 7.)

4) Es ist also das Produkt aus den beiden äusseren Gliedern ein Produkt aus dem ersten Gliede, dem dritten Gliede und dem Exponenten; das Produkt aus den beiden mittleren Gliedern ist ein Produkt aus dem ersten Gliede, dem Exponenten und dem dritten Gliede: es kommen also in beiden Produkten die nämlichen Faktoren vor, folglich sind sie einander gleich (§. 37. Zus. 3.) Ist z. B. die Proportion $7 : 14 = 6 : 12$ gegeben, so ist $14 = 7 . 2$; $12 = 6 . 2$; also auch

$$7 : 7 . 2 = 6 : 6 . 2$$
$$7 . 6 . 2 = 7 . 2 . 6$$

Zusatz. 1. Nur wenn das Produkt aus den äusseren Gliedern dem Produkte aus den mittleren Gliedern gleich ist, stehen die Größen in Proportion.

Zusatz. 2. Wenn das Produkt zweier Zahlen dem Produkte zweier anderer Zahlen gleich ist, so erhält man eine geometrische Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produkts zu äusseren und die Faktoren des andern Produkts zu mittleren Gliedern macht. Da z. B. $3 . 8 = 6 . 4$, so ist auch $3 : 6 = 4 : 8$.

§. 116. Lehrsatz.

Man kann der Proportion unbeschadet die Stellung der Glieder auf mehrfache Weise abändern:

1) Man kann die Verhältnisse umkehren, d. h. die mittleren Glieder zu äusseren und die äusseren Glieder zu mittleren machen;

2) Man kann die mittleren Glieder verwechseln;

3) Man kann die äusseren Glieder verwechseln. Ist z. B. die Proportion gegeben

6 : 12 = 14 : 28, so ist auch

1) 12 : 6 = 28 : 14

2) 6 : 14 = 12 : 28

3) 28 : 12 = 14 : 6.

Beweis.

In den Nr. 1, 2, 3 abgeleiteten Sätzen ist durchgehends das Produkt aus den äusseren Gliedern dem Produkte der mittleren Glieder gleich, folglich sind die Proportionen richtig. (§. 115. Zus. 1.)

Zusatz. Wenn 6 : 12 = 14 : 28, so ist

1) 6 : 14 = 12 : 28

2) 12 : 6 = 28 : 14

3) 12 : 28 = 6 : 14

4) 14 : 6 = 28 : 12

5) 14 : 28 = 6 : 12

6) 28 : 12 = 14 : 6

7) 28 : 14 = 12 : 6.

§. 117. Lehrsatz.

Man kann der Proportion unbeschadet alle Glieder mit der nämlichen Zahl multipliziren oder dividiren. Ist z. B. 4 : 8 = 6 : 12, so ist auch, (wenn man die angegebenen Veränderungen z. B. durch die Zahl 2 vornimmt.) 1) 8 : 16 = 12 : 24 und

2) 2 : 4 = 3 : 6

Beweis.

In den beiden abgeleiteten Sätzen ist das Produkt der beiden äusseren Glieder dem Produkte der beiden

mittleren Glieder gleich, folglich stehen sie in Proportion. (§. 115. Zus. 1.)

Zusatz. 1. Mann kann der Proportion unbeschadet die beiden Glieder des einen Verhältnisses mit der nämlichen Zahl multiplizіren oder auch dividiren und die Glieder des andern Verhältnisses ungeändert lassen. (§. 109. Zus. 3.)

Beispiele.

1) Wenn 8 : 12 = 14 : 21, so ist
16 : 24 = 14 : 21
8 : 12 = 28 : 42
4 : 6 = 14 : 21
8 : 12 = 2 : 3 u. s. w.

2) Wenn 4 : $6\frac{6}{7}$ = 7 : 12, so ist
28 : 48 = 7 . 12 (§. 109. Zus. 3 u. 4) u. s. w.

3) Wenn 6 : 9 = 5 : $7\frac{1}{2}$, so ist
2 : 3 = 10 : 15 u. s. w.

4) Wenn $\frac{5}{8}$: 15 = $\frac{2}{3}$: 16, so ist
5 : 120 = 2 : 48 u. s. w.

5) Wenn $\frac{5}{8}$: $\frac{5}{7}$ = 63 : 72, so ist
35 : 40 = 63 : 72 u. s. w.

Zusatz. 2. Man kann der Proportion unbeschadet die beiden Vorderglieder mit der nämlichen Zahl multiplizіren oder dividiren.

Beispiele.

1) Wenn 3 : 6 = 5 : 10, so ist auch
9 : 6 = 15 : 10 u. s. w.

2) Wenn 12 : 18 = 16 : 24, so ist auch
3 : 18 = 4 : 24 u. s. w.

3) Wenn $1\frac{5}{8} : 6 = 5 : 18\frac{6}{13}$, so ist
$13 : 6 = 40 : 18\frac{6}{13}$ und
$13 : 6 = 520 : 240$ (Zus. 1.) u. s. w.

Zusatz. 3. Man kann der Proportion unbeschadet die beiden Hinterglieder mit der nämlichen Zahl multipliziren und dividiren.

Beispiele.

1) Wenn $7 : 11 = 8 : 12\frac{4}{7}$, so ist
$7 : 77 = 8 : 88$ u. s. w.

2) Wenn $5 : 9 = 6\frac{2}{3} : 12$, so ist
$5 : 3 = 6\frac{2}{3} : 4$ und
$15 : 3 = 20 : 4$ (Zus. 2.)

Zusatz. 4. Man kann der Proportion unbeschadet zwei Glieder mit der nämlichen Zahl multiplizíren oder dividiren, wenn eines derselben ein äusseres, das andere ein mittleres ist. (Zus. 1 — 3.

Zusatz. 5. Man kann der Proportion unbeschadet das eine von den äusseren Gliedern mit irgend einer Zahl multiplizíren und das andere äussere Glied mit eben dieser Zahl dividiren.

Beispiele.

1) Wenn $6 : 10 = 5 : 8\frac{1}{3}$, so ist
$2 : 10 = 5 : 25$

2) Wenn $3\frac{1}{8} : 10 = 5 : 16$; so ist
$25 : 10 = 5 : 2$

Zusatz. 6. Man kann der Proportion unbeschadet das eine der mittleren Glieder mit irgend einer Zahl multiplizíren und das andere mit eben dieser Zahl dividiren.

Beispiele.

1) Wenn $7 : 8 = 4\frac{1}{2} : 5\frac{1}{7}$, so ist
$7 : 4 = 9 : 5\frac{1}{7}$ und
$1 : 4 = 9 : 36$ (Zus. 5.)

2) Wenn $9 : 6 = 5\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$, so ist
$9 : 3 = 11 : 3\frac{2}{3}$ u. s. w.

Zusatz. 7. Jede geometrische Proportion läßt sich so darstellen, daß alle Glieder ganze Zahlen sind. (Zus. 1 — 6.)

Beispiele.

1) Wenn $7\frac{2}{3} : 13\frac{1}{2} = 5\frac{3}{4} : 10\frac{1}{8}$, so ist
$7\frac{2}{3} : 108 = 5\frac{3}{4} : 81$ (Zus. 3.)
$23 : 324 = 5\frac{3}{4} : 81$ (Zus. 1.)
$92 : 324 = 23 : 81$ (Zus. 2.)

2) Wenn $4\frac{1}{4} : 5\frac{2}{3} = 2\frac{5}{6} : 3\frac{7}{9}$, so ist
$17 : 22\frac{2}{3} = 2\frac{5}{6} : 3\frac{7}{9}$ (Zus. 2.)
$17 : 204 = 2\frac{5}{6} : 34$ (Zus. 3.)
$102 : 204 = 17 : 34$.

§. 118. Aufgabe.

Zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das fehlende vierte Glied zu finden.

Auflösung.

Man dividire das Produkt aus den beiden mittleren Gliedern durch das erste Glied, so ist der Quotient das gesuchte vierte Glied.

Beweis.

Sind die drei ersten Glieder der Proportion der Ordnung nach die Zahlen 2, 5, 9, und bezeichnet man das zu berechnende vierte Glied mit X, so ist

$$2 : 5 = 9 : X, \text{ also}$$
$$2 \,.\, X\text{*)} = 45 \text{ (§. 115.)}$$
$$2 = 2$$
$$X = 22\tfrac{1}{2} \text{ (§. 47. Nr. 1.)}$$

Zusatz. 1. Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, setze man in die erste Proportion den für X gefundenen Werth und untersuche, ob das Produkt aus den äusseren Gliedern dem Produkte der beiden mittleren Glieder gleich ist. (§. 115. Zus. 1.)

Zusatz. 2. Kommen in den Gliedern einer Proportion Brüche vor, so schaffe man dieselben weg. (§. 117. Zus. 7); z. B.

Wenn $4 : \frac{5}{6} = 7\frac{1}{2} : X$, so ist

$$24 : 5 = 7\tfrac{1}{2} : X \text{ (§. 117. Zus. 1.)}$$
$$48 : 5 = 15 : X \text{ (§. 117. Zus. 2.)}$$
$$16 : 5 = 5 : X$$
$$16\, X = 25$$
$$X = 1\tfrac{9}{16}.$$

Wenn ferner $5\frac{7}{8} : 4\frac{2}{3} = 15\frac{5}{6} : X$, so ist

$$47 : 37\tfrac{1}{3} = 15\tfrac{5}{6} : X \text{ (§. 117. Z. 1)}$$
$$141 : 112 = 15\tfrac{5}{6} : X$$
$$846 : 112 = 95 : X$$
$$423 : 56 = 95 : X$$
$$423\, X = 5320$$
$$X = 12\tfrac{244}{423}.$$

Zusatz. 3. Wiewohl man die Glieder einer Proportion gewöhnlich so ordnet, daß die zu berechnende

---

*) Statt 2 . X setzt man gewöhnlich 2 X. So ist also auch 5 . X = 5 X; 12 . X = 12 X u. s. w.

Größe X das vierte Glied einnimmt, so kann dieselbe doch auch jede andere Stelle erhalten. Wenn z. B.

$$4 : 8\tfrac{2}{3} = X : 19, \text{ so ist}$$
$$12 : 26 = X : 19$$
$$6 : 13 = X : 19$$
$$13 X = 114$$
$$X = 8\tfrac{10}{13}$$

Wenn ferner $7\tfrac{3}{4} : X = 22\tfrac{5}{8} : 17\tfrac{2}{3}$, so ist

$$62 : X = 181 : 17\tfrac{2}{3}$$
$$62 : X = 543 : 53$$
$$543 X = 3286$$
$$X = 6\tfrac{28}{543}$$
$$= 6{,}051..$$

Wenn endlich $X : 35\tfrac{7}{12} = 18\tfrac{1}{7} : 27\tfrac{5}{8}$, so ist

$$X : 5\tfrac{1}{12} = 127 : 27\tfrac{5}{8}$$ (§. 117. Zus. 6.)

$$X : 40\tfrac{2}{3} = 127 : 221$$
$$X : 122 = 127 : 663$$
$$663 X = 15494$$
$$X = 23{,}369$$

Aufgaben.

1) $17\tfrac{5}{6} : 28 = 5\tfrac{7}{8} : X$
2) $12\tfrac{4}{7} : 15 = 4\tfrac{2}{3} : X$
3) $13\tfrac{5}{8} : 9\tfrac{1}{6} = 22\tfrac{3}{4} : X$
4) $112\tfrac{9}{13} : 97\tfrac{1}{2} = X : 55$
5) $45\tfrac{3}{5} : X = 28\tfrac{4}{9} : 17\tfrac{2}{7}$
6) $X : 218\tfrac{4}{5} = 3\tfrac{3}{4} : 11\tfrac{2}{3}$.

§. 119. Lehrsatz.

Wenn man zwei oder mehrere Proportionen unter einander setzt und die Glieder der Ordnung nach mit

einander multiplizirt, d. h. alle ersten Glieder mit einander, alle zweiten Glieder mit einander u. s. w., so stehen die Produkte gleichfalls in einer Proportion.

Beweis.

1) Es seien z. B. die Proportionen gegeben 4 : 8 = 6 : 12 und 3 : 9 = 5 : 15.

2) Setzt man diese unter einander, und multiplizirt der Ordnung nach die Glieder mit einander, so erhält man:

$$\begin{array}{r} 4 : 8 = 6 : 12 \\ 3 : 9 = 5 : 15 \\ \hline 12 : 72 = 30 : 180 \end{array}$$

3) Die beiden Verhältnisse 12 : 72 und 30 : 180 haben den nämlichen Exponenten 6, folglich bilden sie eine Proportion.

Zusatz.
$$\begin{array}{r} 2 : 6 = 7 : 21 \\ 3 : 4 = 6 : 8 \\ 8 : 32 = 7 : 28 \\ \hline 48 : 768 = 294 : 4704. \end{array}$$

In beiden Verhältnissen ist der Exponent = 16.

§. 120. Erklärung.

Eine Proportion, welche dadurch entstanden ist, daß man die Glieder zweier oder mehrerer Proportionen der Ordnung nach mit einander multiplizirt (§. 119), heißt eine zusammengesetzte Proportion.

Zusatz. 1. Wenn in zwei Proportionen die Hinterglieder einander gleich sind, so kann man aus den Vordergliedern, der Ordnung nach genommen, eine neue Proportion bilden; z. B. da

$$4 : 12 = 6 : 18 \text{ und}$$
$$2 : 12 = 3 : 18, \text{ so ist auch}$$
$$4 : 2 = 6 : 3 \text{ oder}$$
$$2 : 4 = 3 : 6.$$

Zusatz. 2. Wenn in zwei Proportionen die Vorderglieder gleich sind, so kann man aus den Hintergliedern, der Ordnung nach genommen, eine neue Proportion bilden; z. B. da

$$4 : 12 = 8 : 24 \text{ und}$$
$$4 : 16 = 8 : 32, \text{ so ist auch}$$
$$12 : 16 = 24 : 32 \text{ oder}$$
$$16 : 12 = 32 : 24.$$

Zusatz. 3. Wenn in zwei Proportionen ein Paar ungleichnamige Glieder gleich sind, z. B. das zweite Glied des ersten Verhältnisses der ersten Proportion dem ersten Gliede des ersten Verhältnisses der zweiten Proportion gleich ist, so können diese in der abzuleitenden Proportion ganz weggelassen werden. Da z. B.

$$6 : 12 = 8 : 16 \text{ und}$$
$$12 : 24 = 7 : 14 \text{ so ist}$$
$$6 : 24 = 56 : 224.$$

Wenn ferner $5 : 7 = 6 : X$ und

$$4 : 9 = X : Y, \text{ so ist}$$
$$20 : 63 = 6 : Y.$$

Es hebt sich nämlich das X im vierten Gliede der ersten Proportion gegen X im dritten Gliede der zweiten Proportion auf.

Wenn ferner $4 : 7 = 6 : X$

$$2 : 9 = X : Y$$
$$7 : 13 = Y : Z, \text{ so ist}$$
$$8 : 117 = 6 : Z.$$

Es fällt nämlich 7 im zweiten Gliede der ersten Proportion gegen 7 im ersten Gliede der dritten Proportion weg; auch hebt sich X gegen X und Y gegen Y auf.

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } 3 : 8 = 5 : X \\ 8 : 7 = X : Y \\ 7 : 11 = Y : Z, \text{ so ist} \\ \hline 3 : 11 = 5 : Z. \end{array}$$

Zusatz. 4. Wenn mehrere Proportionen unter einander gesetzt werden, so kann man je zwei Glieder mit der nämlichen Zahl multipliziren oder dividiren, wenn nur eines dieser Glieder ein äusseres, das andere ein mittleres ist; z. B. wenn

$$\begin{array}{l} 4 : 9 = 7 : X \text{ und} \\ 15 : 8 = X : Y, \text{ so ist} \\ \hline 5 : 6 = 7 : Y. \end{array}$$

Es ist nämlich das erste Glied der ersten Proportion und das zweite Glied der zweiten Proportion mit 4, das erste Glied aber der zweiten Proportion und das zweite Glied der ersten mit 3 dividirt worden; X hat sich gegen X aufgehoben. Man kann die Rechnung so stellen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 3 & & & & \\ 4 & : & 9 & = & 7 & : & X \\ 15 & : & 8 & = & X & : & Y \\ 5 & & 2 & & & & \\ \hline 5 & : & 6 & = & 7 & : & Y. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Wenn ferner } 6\tfrac{1}{2} : 19 = 4 : X \\ 8 : 15 = X : Y \\ 6 : 2\tfrac{1}{5} = Y : Z, \text{ so ist} \\ \hline 26 : 209 = 1 : Z. \end{array}$$

Das Verfahren, das sich auf mannichfache Weise abändern läßt, ist folgendes. Man multiplizire das erste Glied der ersten Proportion mit 2, und dividire zugleich das erste Glied der zweiten Proportion mit 2. (§. 117. Zus. 5.) Das zweite Glied der dritten Proportion multiplizire man mit 5 und dividire zugleich das zweite Glied der zweiten Proportion mit 5. Nun hebt sich das dritte Glied der ersten Proportion gegen das im ersten Gliede der zweiten Proportion stehen gebliebene 4 auf. Endlich dividire man das erste Glied der dritten Proportion und das im zweiten Gliede der zweiten Proportion stehen gebliebene 3 mit 3. X hebt sich gegen X und Y gegen Y auf. Es wird sich also die Rechnung auf folgende Weise ergeben:

$$13\;\cancel{6}\tfrac{1}{2} : 19 = \cancel{4} : X$$

$$\begin{array}{l} \quad\quad\; 3 \\ 4\;\cancel{8} : \cancel{15} = X : Y \\ \quad\quad\; 11 \\ 2\;\cancel{6} : \cancel{2\tfrac{1}{5}} = Y : Z \\ \hline 26 : 209 = 1 : Z. \end{array}$$

§. 121. Lehrsatz.

Wenn 4 Zahlen in geometrischer Proportion stehen, so verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie sich jedes einzelne Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält. Wenn z. B.

$$4 : 8 = 6 : 12; \text{ so ist auch}$$

$$\begin{aligned} 4 + 6 : 8 + 12 &= 4 : 8 \\ &= 6 : 12, \text{ d. h.} \\ 10 : 20 &= 4 : 8 \\ &= 6 : 12 \end{aligned}$$

Beweis.

Da $4 : 8 = 6 : 12$, so ist

$$4 \cdot 12 = 8 \cdot 6 \text{ (§. 115.)}$$
$$6 \cdot 12 = 6 \cdot 12 \text{ (§. 11. Nr. 1.)}$$

$$4 \cdot 12 + 6 \cdot 12 = 8 \cdot 6 + 6 \cdot 12 \text{ (§. 24 N. 1)}$$
$$(4 + 6)\, 12 = (8 + 12)\, 6 \text{ (§. 35. Zus. 5.)}$$
$$4 + 6 : 8 + 12 = 6 : 12 \text{ (§. 115. Zus. 2.)}$$
$$= 4 : 8 \text{ (§. 110.) d. i.}$$
$$10 : 20 = 6 : 12$$
$$= 4 : 8$$

Zusatz. 1. Eben so verhält sich auch die Differenz der beiden Vorderglieder zur Differenz der beiden Hinterglieder, wie sich jedes einzelne Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält. Ist z. B.

$$18 : 6 = 12 : 4, \text{ so ist}$$
$$18 - 12 : 6 - 4 = 18 : 6$$
$$= 12 : 4$$

Ist nämlich

$$18 : 6 = 12 : 4, \text{ so ist}$$
$$18 \cdot 4 = 6 \cdot 12$$
$$12 \cdot 4 = 12 \cdot 4$$

$$18 \cdot 4 - 12 \cdot 4 = 6 \cdot 12 - 12 \cdot 4 \text{ (§. 31 N. 1)}$$
$$(18 - 12)\, 4 = (6 - 4)\, 12 \text{ (§. 35. Zus. 6.)}$$
$$18 - 12 : 6 - 4 = 12 : 4 = 18 : 6, \text{ d. i.}$$
$$6 : 2 = 12 : 4 = 18 : 6.$$

Zusatz. 3. Wenn überhaupt mehrere Größen in geometrischer Proportion stehen, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie sich jedes einzelne Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält. Wenn z. B.

$4 : 8 = 6 : 12 = 7 : 14 = 9 : 18$, so ist

$$\begin{aligned} 26 : 52 &= 4 : 8 \\ &= 6 : 12 \\ &= 7 : 14 \\ &= 9 : 18 \end{aligned}$$

§. 122. Aufgaben.

I. Die Zahl 418 in drei ungleiche Theile nach dem Verhältnisse der Zahlen 2, 3, 5 zu theilen.

Auflösung.

1) Man betrachte die Zahlen 2, 3, 5, nach deren Verhältnisse die gegebene Zahl 418 getheilt werden soll, als Vorderglieder der zu bildenden Verhältnisse, so daß $2 + 3 + 5 = 10$ die Summe der Vorderglieder ist.

2) Die zu theilende Zahl 418 nehme man als die Summe der Hinterglieder an.

3) Die Theile, in welche die Zahl 418 getheilt werden soll, betrachte man als die Hinterglieder der gegebenen Verhältnißzahlen 2, 3, 5, und bezeichne sie einstweilen mit X, Y, Z.

4) Es ist also $10 : 418 = 2 : X$

$$\begin{aligned} &= 3 : Y \\ &= 5 : Z \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} X &= 83{,}6 \\ Y &= 125{,}4 \\ Z &= 209{,}0 \\ \hline X + Y + Z &= 418 \end{aligned}$$

II. Man soll 521 in 3 ungleiche Theile nach dem Verhältnisse der Zahlen $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{5}$ theilen.

Auflösung.

1) Man addire die drei gemischten Zahlen, nach

deren Verhältnisse die Theilung vorgenommen werden soll. Es ist $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} = \frac{227}{30}$.

2) Um die Rechnung zu erleichtern, nehme man nicht $\frac{227}{30}$, sondern 227 als die Summe der Vorderglieder an, multiplizire aber auch jedes einzelne Vorderglied mit 30.

3) Es ist also

$$\begin{aligned} 227 : 521 &= 50 : X; & X &= 114\tfrac{172}{227} \\ &= 75 : Y & Y &= 172\tfrac{31}{227} \\ &= 102 : Z & Z &= 234\tfrac{24}{227} \\ \hline & & X + Y + Z &= 521 \end{aligned}$$

Aufgaben.

1) Die Zahl 5036 soll in 3 ungleiche Theile nach dem Verhältnisse der Zahlen 7, 10, 11 getheilt werden.

2) Die Zahl 20596 soll in 4 ungleiche Theile nach dem Verhältnisse der Zahlen 3, 5, 7, 8 getheilt werden.

3) Die Zahl 709 soll in 3 ungleiche Theile nach dem Verhältnisse der Zahlen $7\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{8}$, $1\frac{2}{9}$ getheilt werden.

4) Die Zahl $528\frac{2}{3}$ in 4 ungleiche Theile zu theilen, die im Verhältnisse der Zahlen $2\frac{4}{5}$, $1\frac{5}{6}$, $1\frac{1}{7}$, $\frac{5}{8}$ stehen.

Achter Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Proportionen auf Verhältnisse des bürgerlichen Lebens.

---

§. 123. Erklärungen.

a) Zwei benannte Zahlen der nämlichen Art stehen nur in so fern in einem Verhältnisse, als man ihre Mengen vergleicht. Es verhalten sich nämlich 8 Ellen zu 16 Ellen wie 8 zu 16, d. i. 8 Ellen : 16 Ellen = 8 : 16. Ueberhaupt verhalten sich zwei benannte Zahlen, die sich auf die nämliche Einheit beziehen, wie die unbenannten Zahlen, welche ihre Menge andeuten. Es lassen sich daher zwei benannte Zahlen von der nämlichen Art als unbenannte behandeln.

b) Zwei benannte Zahlen verschiedener Art lassen sich nur in so fern vergleichen oder in ein Verhältniß setzen, als die eine Größe auf irgend eine Weise von der andern abhängt, so daß mit der Aenderung der einen Größe eine nothwendige Veränderung der andern verbunden ist. So hängt z. B. der Geldbetrag für eine Waare von der Menge derselben ab, die Größe der Zinsen von der Größe des Kapitals u. s. w.

§. 124. Erklärungen.

a) Das Verhältniß zwischen zwei benannten Zahlen verschiedener Art heißt gerade, wenn mit der Zunahme der einen Größe die gleichförmige Zunahme der andern, und mit der Abnahme der einen Größe die gleichförmige Abnahme der andern verbunden ist.

b) Das Verhältniß zwischen zwei benannten Zahlen verschiedener Art heißt umgekehrt, wenn mit der Zunahme der einen Größe die gleichförmige Abnahme der andern, und mit der Abnahme der einen Größe die gleichförmige Zunahme der andern verbunden ist.

Zusatz. 1. In geradem Verhältnisse stehen: 1) die Waare und der Geldbetrag für dieselbe. Je mehr man nämlich von einer Waare kauft, desto mehr muß man zahlen; je weniger man kauft, desto weniger hat man zu zahlen; 2) Kapitalien und Zinsen; 3) die Zahl der Arbeiter und der Lohn; 4) Die Zahl der Arbeiter und ihre Leistung u. s. w.

Zusatz. 2. In umgekehrtem Verhältnisse stehen: 1) die Zahl der Arbeiter und die zu einem bestimmten Geschäfte erforderliche Zeit. Je mehr Arbeiter nämlich zugleich beschäftigt werden, desto weniger Zeit bedürfen sie zur Vollendung der Arbeit; je weniger Arbeiter zugleich beschäftigt werden, desto mehr Zeit gebrauchen sie. 2) Die Zahl der Personen und die Zeit, in welcher ein bestimmter Vorrath aufgezehrt wird; die Geschwindigkeit der Bewegung und die Zeit bei einem bestimmten Raume, d. h. je größer die Geschwindigkeit eines Körpers ist, desto weniger Zeit gebraucht er, einen bestimmten Raum zu durchlaufen; 4) der

Preis einer Waare und die Menge derselben für eine bestimmte Geldsumme u. s. w.

A) Einfache Proportionen.

§. 125. Erklärung.

Diejenige Regel, welche zu drei gegebenen benannten Zahlen die vierte Proportionalzahl finden lehrt, heißt Regel de tri (regula de tribus terminis.)

Zusatz. Wenn man eine Aufgabe mit Hilfe der Regel de tri auflösen will, so muß man zuvor untersuchen, ob die Größen, die in der Aufgabe enthalten sind, wirklich in geometrischer Proportion stehen, d. h. ob die Größen so von einander abhängen, daß mit der Zunahme der einen Größe die gleichförmige Zunahme der andern Größe, oder wohl auch mit der Zunahme der einen Größe die gleichförmige Abnahme der andern Größe verbunden ist. (§ 124). Wird z. B. gefragt: Was kosten 10 Ellen einer gewissen Waare, wenn für 3 Ellen 7 Gulden bezahlt worden sind, so findet man, daß mit der Waare zugleich auch der Betrag für dieselbe gleichförmig wächst, daß also die Aufgabe eine Proportion enthält.

Wird ferner die Aufgabe gegeben: Vier Personen vollendeten eine gewiße Arbeit in 15 Tagen; in wie viel Tagen werden unter gleichen Umständen 9 Personen eine gleiche Arbeit vollenden? so erkennt man, daß mit der Zunahme der Zahl der Arbeiter die zur Vollendung der Arbeit erforderliche Zeit gleichmäßig

abnimmt, daß also in der Aufgabe eine Proportion enthalten ist.

Wird folgende Aufgabe gegeben: Ein Körper fällt wenn er sich überlassen wird, in der ersten Sekunde durch einen Raum von 15 Pariser Fuß; wie viele Fuße durchfällt er in 4 Sekunden? so darf man durchaus nicht annehmen, daß die durchfallenen Räume gleichförmig mit der Zeit zunehmen, daß also der Körper in zwei Sekunden 2 . 15 Fuß, in drei Sekunden 3 . 15 Fuß durchfallen wird. Es ist nämlich erwiesen, daß ein Körper in der zweiten Sekunde 3 . 15 = 45, in der dritten Sekunde 5 . 15 = 75 Fuß durchfällt u. s. w. Wollte man also die gestellte Frage durch die Regel de tri auflösen, so wäre das Resultat der Rechnung unrichtig.

Wollte man ferner folgende Frage stellen: Eine Person gebrauchte zu einer Fußreise 18 Tage; wie viele Tage wird zu einer gleichen Reise eine Gesellschaft von 5 Personen gebrauchen? so ließe sich diese Aufgabe weder durch einen Regeldetrisatz, noch auf eine andere Weise auflösen, da die Länge der Reise zur Zahl der Personen in keinem Verhältnisse steht und die Frage selbst etwas Ungereimtes enthält.

§. 126. Aufgabe.

Zu 3 benannten Zahlen, von denen zwei auf die nämliche Einheit sich beziehen, die vierte geometrische Proportionalgröße zu finden.

Auflösung.

1) Man untersuche, ob die Größen, die in der Aufgabe enthalten sind, in geometrischer Proportion

stehen, d. h. ob die vorgelegte Aufgabe mit Hilfe der Regeldetri aufgelöst werden kann.

2) Man überlege, ob die Verhältnisse gerad oder umgekehrt sind; ferner ob die Verhältnisse zu- oder abnehmen.

3) Die Größe, welche gefunden werden soll, bezeichne man mit X.

4) Man ordne die Glieder der Proportion so, daß nur gleichartige Größen in ein Verhältniß kommen. Zu den ersten Gliedern der Proportion mache man die Größen, welche mit der gesuchten Größe X ungleichartig sind. Die Größe, welche mit der gesuchten gleichartig ist, setze man in das dritte Glied, so daß also X das vierte Glied der Proportion wird.

5) Sind nun die Verhältnisse, die in der Proportion liegen, gerad, so ordne man die Glieder so, daß sich das erste Glied auf das dritte, und das zweite auf das vierte bezieht. Wird z. B. gefragt: Sechs Ellen kosteten 7 Gulden; was kosten von gleicher Waare 5 Ellen? so setze man

Ellen Ellen Guld. Guld.

6 : 5 = 7 : X, so daß im ersten Gliede die Waare, im dritten der Betrag derselben steht, und daß sich die Waare im zweiten Gliede auf den gesuchten Geldbetrag X im vierten Gliede bezieht.

6) Sind aber die Verhältnisse umgekehrt, so ordne man die Glieder so, daß sich das erste auf das vierte, und das zweite auf das dritte bezieht. Wird z. B. die Frage gestellt: Fünf Personen vollendeten eine

gewiße Arbeit in 9 Tagen; wie lange gebrauchen zu einer gleichen Arbeit 7 Personen? so setze man nicht

Arb. Arb. Tage Tage

5 : 7 = 9 : X, so daß im ersten Gliede die Zahl der Arbeiter und im dritten die Zeit stünde, die sie zu einer gewißen Arbeit gebrauchten u. s. f., sondern man setze

Arb. Arb. Tage Tage

7 : 5 = 9 : X, so daß sich das erste Glied, welches die Zahl der Arbeiter enthält, auf das vierte Glied als die für diese Arbeiter erforderliche Zeit, und das zweite Glied auf das dritte bezieht.

7) Nun betrachte man alle Glieder der Proportion als unbenannte Zahlen. (§. 123. a.)

8) Setze das Produkt der äusseren Glieder dem Produkte der mittleren gleich, und dividire das letztere durch die Zahlengröße, welche bei X steht.

9) Den Quotienten beziehe man auf Einheiten der Größe, nach welcher gefragt worden ist.

Zusatz. 1. Zur Auffindung des vierten Glieds der Proportion benütze man §. 117. Zus. 1 — 7.

Zusatz. 2. Sollen in ein Verhältniß Größen gesetzt werden, die zwar an sich nicht gleichartig sind, aber durch eine Reduktion gleichartig gemacht werden können, so nehme man dieselbe vor der Bildung der Proportion selbst vor. Wird z. B. gefragt: wie viele Stücke einer Waare erhält man für 2 Gulden, wenn 3 Stücke 23 Kr. kosten, so kann man nicht setzen

Kr. Guld. Stück Stück

23 : 2 = 3 : X, sondern man löse die Gulden in Kreuzer auf (§. 98) und setze

Kr. Kr. St. St.

$$23 : 120 = 3 : X$$

Wird ferner gefragt: Was kosten $15\frac{3}{4}$ Ellen einer Waare, wenn $12\frac{7}{8}$ Ellen mit 20 Gulden 16 Kr. bezahlt worden sind, so denke man sich die 20 Gulden 16 Kr. als 20 Gulden $+ \frac{16}{60}$ Gulden $= 20\frac{4}{15}$ Gulden und bilde die Proportion

Ellen Ellen Guld. Guld.

$$12\frac{7}{8} : 15\frac{3}{4} = 20\frac{4}{15} : X$$

Zusatz. 3. Zwei Zahlen, welche sich auf Einheiten verschiedener Art beziehen, verhalten sich umgekehrt, wie die unbenannten Zahlen, die ihre Menge ausdrücken; z. B. da

10 Kronthaler = 27 Gulden, so ist

1 Kronthaler : 1 Gulden = 27 : 10,

und da 5 Sächs. Thaler = 9 Gulden, so ist

1 Sächs. Thaler : 1 Guld. = 9 : 5 (§. 115. Z. 1)

§. 127. Aufgaben.

I. Wie groß ist der jährliche Zins von 9580 Gulden zu 4 Prozent? *)

---

*) Derjenige, welcher einem Andern eine gewiße Summe Geldes für eine gewiße Zeit überläßt, heißt der Gläubiger (creditor), dagegen derjenige, welcher die dem Gläubiger angehörige Summe für eine bestimmte Zeit benützen darf, der Schuldner (debitor). Das, was der Schuldner dem Gläubiger für die Benützung dieser Summe, welche man das Kapital nennt, jährlich zu zahlen hat, nennt man die Zinsen oder Interessen, und das, was von diesen Zinsen auf jedes Hundert der ausgeliehenen Summe trifft, be-

Auflösung.

1) Die Aufgabe läßt sich durch einen Regeldetrisatz auflösen. (§. 125.)

2) Die Verhältnisse der Aufgabe sind gerad. (§. 124)

3) Man ordne die Glieder nach §. 126. Nr. 5.

4) Da nun der Aufgabe gemäß von 100 Gulden Kapital jährlich 4 Gulden Zins bezahlt werden, so ist

Kap.		Kap.		Zinsen		Zinsen
100 Guld.	:	9580	=	4 Guld.	:	X, also
5 »	:	1916	=	1 »	:	X (§. 117 Zus. 1 u. 2.)

5 X = 1916 (§. 115.)

X = $383\frac{1}{5}$, d. h.

die jährlichen Zinsen von 9580 Gulden zu 4 Prozent betragen $383\frac{1}{5}$ Gulden (§. 126. Nr. 9) = 383 Gulden 12 Kr.

II. 15 Arbeiter vollendeten ein gewißes Geschäft in 7 Tagen: wie viele Tage gebrauchen unter gleichen Umständen 9 Arbeiter?

Auflösung.

1) Die Aufgabe läßt sich durch einen Regeldetrisatz auflösen.

2) Die Verhältnisse sind umgekehrt. (124. b.)

---

stimmt den Zinsfuß. Werden z. B. für die Benützung eines Kapitals von 1000 Gulden jährlich 50 Gulden Zinsen bezahlt, so treffen auf jede 100 Gulden Kapital 5 Gulden Zinsen, und es wird daher das Kapital zu 5 Prozent verzinst. Der Zinsfuß stützt sich auf einen Vertrag zwischen dem Gläubiger und Schuldner; auch sind dem Zinsfuße durch Landesgesetze Gränzen gesteckt.

3) Da 9 Arbeiter zur Vollendung des nämlichen Geschäfts mehr Zeit gebrauchen als 15 Arbeiter, so sind die Verhältnisse zunehmend.

4) Man erhält also

Arb.		Arb.		Tage		Tage	
9	:	15	=	7	:	X	(§. 107. e u. §. 126 N. 6)
3	:	5	=	7	:	X	

$$3 X = 35$$
$$X = 11\tfrac{2}{3}$$

d. h. 9 Arbeiter gebrauchen zur Vollendung des Geschäfts beinahe 12 Tage.

III. 500 Mann sind auf 8 Monate mit Lebensmitteln versehen. Wie lange können sich von diesem Vorrathe 950 Mann erhalten?

Auflösung.

1) Die Aufgabe läßt sich durch einen Regeldetrisatz auflösen.

2) Die Verhältnisse sind umgekehrt. (§. 124. b.)

3) Die Verhältnisse sind abnehmend, da 950 Mann den Vorrath in kürzerer Zeit aufzehren als 500 Mann.

4) Man erhält also

$$950 : 500 = 8 : X$$
$$95 : 50 = 8 : X$$
$$19 : 10 = 8 : X$$
$$19 X = 80$$
$$X = 4\tfrac{4}{19}$$

Es reicht also der Vorrath für $4\frac{4}{19}$ Monate hin, d. h. für 4 Monate und 6 Tage. Eine weitere Angabe nach Stunden oder gar Minuten hätte hier keinen Sinn.

IV. 5500 Mann sind auf fünf Monate mit Lebens-

mitteln versehen. Wie viel Mann können sich von diesem Vorrathe $3\frac{1}{2}$ Monate lang halten?

Auflösung.

1) Die Aufgabe läßt sich durch einen Regeldetrisatz auflösen.

2) Die Verhältnisse sind umgekehrt.

3) Die Verhältnisse sind zunehmend, weil sich $3\frac{1}{2}$ Monate lang mehr Leute von einem bestimmten Vorrathe erhalten können, als wenn derselbe 5 Monate lang ausreichen soll.

4) Man erhält also

$$3\tfrac{1}{2} : 5 = 5500 : X$$
$$7 : 10 = 5500 : X$$
$$7\,X = 55000$$
$$X = 7857$$

Abgesehen von den Bedingungen der Aufgabe erhält man für X die gemischte Zahl $7857\frac{1}{7}$. Da sich aber X auf eine Anzahl Personen bezieht, so hat der Bruch $\frac{1}{7}$ durchaus keinen Sinn. Die Zahl 7857 (Mann) enthält die Beantwortung der gestellten Frage.

Zusatz. Aus den gelösten Aufgaben erhellt, daß man gerade Verhältnisse nicht mit zunehmenden, oder umgekehrte mit abnehmenden verwechseln darf. Es kann ein Verhältniß gerade und zugleich abnehmend seyn, so wie auch ein umgekehrtes Verhältniß zunehmend seyn kann.

§. 128. Aufgaben.

1) Wie groß ist der jährliche Zins von 5960 Gulden zu 4 Prozent?

2) Wie groß ist der jährliche Zins von 9580 Gulden zu $4\frac{1}{2}$ Prozent?

3) Für ein gewißes Kapital, das zu $4\frac{1}{2}$ Prozent verzinst wird, erhält man jährlich 338 Gulden 24 Kr. Zinsen. Wie groß ist dieses Kapital?

4) 5760 Gulden tragen jährlich 211 Gulden 12 Kr. Zins. Zu wie viel Prozent ist dieses Kapital angelegt?

5) Wie viele Ellen erhält man für 3 Gulden, wenn $28\frac{1}{3}$ Ellen 7 Gulden 30 Kr. kosteten?

6) Wie viele Ellen erhält man für 5 Gulden 24 Kr., wenn 7 Ellen 45 Kr. kosteten?

7) Für $3\frac{1}{2}$ Ellen hat man 4 Gulden 20 Kr. bezahlt; was kosten $4\frac{5}{8}$ Ellen?

8) 9 Personen vollendeten eine gewiße Arbeit in 10 Tagen: wie lange gebrauchen zu einer gleichen Arbeit 7 Personen.

9) 10 Personen vollendeten eine bestimmte Arbeit in 16 Tagen: wie viele Personen sind erforderlich, wenn eine gleiche Arbeit in 5 Tagen vollendet werden soll?

10) Von einem gewißen Vorrathe an Lebensmitteln können sich 820 Mann 5 Monate lang halten. Wie lange reicht dieser Vorrath für 1200 Mann aus?

11) Wie viel Mann können von dem nämlichen Vorrathe 3 Monate lang erhalten werden?

12) Für 3 Pfunde, 2 Unzen, 5 Drachmen hat man 7 Gulden 48 Kr. 3 Pf. bezahlt. Was kosten 4 Pfund, 9 Unzen, 3 Drachmen? S. Tabelle IV. b.

13) Wie viele Duodezimalzolle gehen auf 212 Dezimalzolle?

14) Wie viele Dezimalzolle gehen auf 418 Duodezimalzolle?

15) Die bayerische Elle hält 369,272 Pariser Linien; die Ansbacher Elle hält 276,78 Pariser Linien. Wie viele Ansbacher Ellen gehen auf 100 bayerische Ellen? (§. 126. Zus. 3.)

16) Die Nürnberger Elle hält 291,08 Pariser Linien. Wie viele Nürnberger Ellen gehen 1) auf 100 Ansbacher und 2) auf 100 bayerische Ellen?

17) Wie viele Sächsische Thaler gehen auf 100 Kronthaler?

18) Zur Austapezirung eines Zimmers gebraucht man 200 Ellen Tapete, wenn dieselbe $\frac{7}{8}$ Ellen breit ist. Wie viele Ellen wird man gebrauchen, wenn die Tapete $\frac{5}{6}$ Ellen breit ist?

B) Zusammengesetzte Proportionen.

§. 109. Erklärung.

Es ist nicht selten, daß die Beantwortung einer Frage von zwei oder mehreren Verhältnissen zugleich abhängig ist, so daß also die zu berechnende Größe sich ändert, so wie sich eines jener Verhältnisse ändert. Wird z. B. die Aufgabe gegeben: Wie viel Zins tragen 580 Gulden in 7 Monaten zu 4 Prozent, so ist zu erkennen, daß die Zinsen 1) von der Größe des Kapitals und 2) von der Zeit, welche hindurch das Kapital angelegt war, abhängen. Man kann daher zur Beantwortung der Frage zwei von einander unabhängige Proportionen bilden, von welchen die erste

die Frage beantwortet: Wie groß ist der jährliche Zins von 580 Gulden zu 4 Prozent? Bezeichnet man diese jährigen Zinsen mit X, so ist

$$100 : 580 = 4 : X$$
$$5 : 58 = 2 : X$$
$$5\,X = 116$$
$$X = 23\tfrac{1}{5}.$$

Die zweite Proportion beantwortet den zweiten Theil der gestellten Frage, welche sich nun so ausdrücken läßt: Wie viel Zins trifft auf 7 Monate, wenn für ein Jahr d. h. für 12 Monate $23\frac{1}{5}$ Gulden Zins zu bezahlen sind? Bezeichnet man diese siebenmonatlichen Zinsen mit Y, so ist

$12 : 7 = 23\frac{1}{5} : Y$, und man findet
$Y = 13\frac{8}{15} = 13$ Gulden 32 Kr.

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe hat das Unbequeme, daß man die Antwort auf die gestellte Frage nicht unmittelbar erhielt, sondern zuvor eine Größe berechnen mußte, nach welcher gar nicht gefragt war. So mußten nach der gegebenen Auflösung die Zinsen von 580 Gulden zuerst für das ganze Jahr berechnet werden, und erst hierauf konnte man die siebenmonatlichen Zinsen ausmitteln. Diese Unbequemlichkeit kann man auf folgende Weise vermeiden. Man setze die jährlichen Zinsen von 580 Gulden = X, ohne jedoch X zu berechnen; die siebenmonatlichen Zinsen nenne man Y, Die Proportionen werden mit Worten so heißen:

1) 100 Gulden Kapital verhalten sich zu 580 Gulden Kapital wie sich die jährlichen Zinsen von 100

Gulden zu den jährlichen Zinsen von 580 Gulden verhalten; d. i.

$$100 : 580 = 4 : X$$

2) 12 Monate verhalten sich zu 7 Monaten wie die Zinsen, die auf 12 Monate treffen und X genannt worden sind, zu den Zinsen, die für 7 Monate zu bezahlen sind und Y heißen; d. i.

$$12 : 7 = X : Y$$

Setzt man nun beide Proportionen unter einander, so ist

$$100 : 580 = 4 : X$$
$$12 : 7 = X : Y, \text{ also}$$
$$1200 : 4060 = 4 : Y \quad (\text{§. 120. Z. 3.})$$
$$15 : 203 = 1 : Y$$
$$15\,Y = 203$$
$$Y = 13\tfrac{8}{15}.$$

§. 130. Aufgaben.

I. Sieben Arbeiter haben in 15 Tagen 248 Ellen einer gewißen Waare geliefert. Wie viele Ellen einer gleichen Waare können 9 Arbeiter in 8 Tagen liefern?

Auflösung.

1) Die Zahl der Ellen, welche geliefert werden können, hängt 1) von der Zahl der Arbeiter und 2) von der Zeit ab, welche auf die Arbeit verwendet wird. In der Aufgabe liegen daher zwei von einander unabhängige Verhältnisse, und es kann also dieselbe durch zwei Proportionalsätze gelöst werden.

2) Berücksichtigt man in der ersten Proportion die Zahl der Arbeiter, so ergiebt sich, daß unter übrigens gleichen Umständen 9 Arbeiter mehr liefern

können als 7 Arbeiter, daß also die Verhältnisse zunehmend sind. Bezeichnet man die Zahl der Ellen, welche die 9 Arbeiter liefern können mit X, so ist

$$7 : 9 = 248 : X, \text{ also}$$
$$7 X = 2232$$
$$X = 318\tfrac{6}{7}.$$

4) Nennt man ferner die Zahl der Ellen, welche in 8 Tagen geliefert werden können, Y, so ersieht man, daß bei übrigens gleichen Umständen in 8 Tagen nicht so viel geliefert werden kann als in 15 Tagen, daß also die Verhältnisse abnehmend sind. Man erhält

$$15 : 8 = 318\tfrac{6}{7} : Y, \text{ also}$$
$$Y = 170\tfrac{2}{35}.$$

5) Es läßt sich nun aber diese Aufgabe leichter und kürzer auflösen, wenn man auf folgende Weise verfährt:

$$7 : 9 = 248 : X$$
$$15 : 8 = X : Y$$
$$\overline{35 : 24 = 248 : Y}$$
$$Y = 170\tfrac{2}{35}.$$

II. Aufgabe. 36 Personen, die täglich 9 Stunden arbeiteten, haben in 10 Tagen 300 Ellen Zeug geliefert, der $1\frac{4}{5}$ Ellen breit war. In wie viel Tagen können 28 Personen, welche täglich 8 Stunden arbeiten, 256 Ellen liefern, wenn die Waare $1\frac{3}{4}$ Ellen breit werden soll?

Auflösung.

1) 28 Personen gebrauchen bei übrigens gleichen Umständen mehr Zeit zur Vollendung einer Arbeit als 36 Personen. Bezeichnet man also die Zahl der Tage, nach welchen gefragt ist mit u, so ist

$$28 : 36 = 10 : u.$$

2) Wenn die Personen täglich nur 8 Stunden arbeiten, so werden zur Fertigung einer bestimmten Waare mehr Tage erfordert, als wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten. Bezeichnet man die Zahl der Tage, welche zur Vollendung der Arbeit erfordert werden, wenn man täglich nur 8 Stunden arbeitet, mit X, so ist

$$8 : 9 = u : X.$$

3) Zur Vollendung von 256 Ellen gebraucht man nicht so viele Tage als zur Vollendung von 300 Ellen. Bezeichnet man also die Zahl der Tage in Beziehung auf die zu liefernden Ellen mit Y, so ist

$$300 : 256 = X : Y.$$

4) Da die Waare im zweiten Falle schmäler werden soll als sie im ersten Falle geworden ist, so wird zur Fertigung derselben weniger Zeit erfordert. Bezeichnet man also die Zahl der Tage in Beziehung auf die Breite der zu liefernden Waare mit Z, so ist

$$1\tfrac{4}{5} : 1\tfrac{3}{4} = Y : Z.$$

5) Verbindet man diese 4 Proportionen, so ist

$$\begin{array}{rcl} 28 : 36 &=& 10 : u \\ 300 : 256 &=& u : X \\ 8 : 9 &=& X : Y \\ 1\tfrac{4}{5} : 1\tfrac{3}{4} &=& Y : Z, \text{ also} \\ \hline 1 : 12 &=& 1 : Z \end{array}$$

$Z = 12$ (Vergl. §. 120. Zus. 4.)

Die bestellte Waare kann also in 12 Tagen geliefert werden.

Zusatz. 1. So viele Proportionen die Auflösung einer Aufgabe auch erfordern mag, so muß doch jede genau in Beziehung auf die gestellte Frage gebildet werden. In der letzten Aufgabe wurde nach einer

Zeit gefragt. Es wäre daher ganz unrichtig gewesen, wenn man z. B. den an sich ganz richtigen Satz hätte durch eine Proportion darstellen wollen, daß 28 Personen unter übrigens gleichen Umständen weniger Ellen liefern können als 36 Personen.

Zusatz. 2. Man gewöhne sich bei der Beurtheilung der Verhältnisse, welche in der Aufgabe liegen, daran, diejenige Größe zuerst zu betrachten, welche sich auf die gestellte Frage bezieht. So sage man in der letzten Aufgabe nicht; 36 Personen gebrauchen zur Vollendung einer gewißen Arbeit weniger Zeit als 28 Personen, sondern man nenne die 28 Personen, welche im Fragsatze stehen, zuerst und schließe so: 28 Personen gebrauchen zu einer Arbeit mehr Zeit als 36 Personen, wodurch also ausgesprochen wird, daß das Verhältniß zunehmend ist, d. h. 28 : 36. Man schließe ferner nicht so: Personen, welche täglich 9 Stunden arbeiten, gebrauchen weniger Tage zur Vollendung einer Arbeit als diejenigen, welche täglich nur 8 Stunden arbeiten, sondern man nenne die 8 Stunden, welche im Fragsatze stehen, zuerst und schließe also: wenn man täglich nur 8 Stunden arbeitet, so gebraucht man zur Vollendung einer Arbeit mehr Tage, als wenn man täglich 9 Stunden arbeitet, wodurch man also ausdrückt, daß das Verhältniß zunehmend ist, d. h. 8 : 9. Man schließe ferner nicht: zur Verfertigung von 300 Ellen gebraucht man mehr Zeit als von 256 Ellen, sondern man nenne die 256 Ellen im Fragsatze zuerst, und schließe: zu 256 Ellen gebraucht man weniger Zeit als zu 300 Ellen, so daß dadurch ausgedrückt wird, daß das Verhältniß abnimm

d. h. 300 : 256. Endlich sage man nicht, zur Vollendung einer Waare, welche $1\frac{4}{5}$ Ellen breit werden soll, gebraucht man mehr Zeit, als wenn die Waare nur $1\frac{3}{4}$ Ellen breit wird; sondern man nenne die Breite $1\frac{3}{4}$ im Fragsatze zuerst und schließe so: zur Vollendung einer Waare, die $1\frac{3}{4}$ Ellen breit wird, gebraucht man nicht so viel Zeit als wenn sie $1\frac{4}{5}$ Ellen breit wird, so daß also das Verhältniß abnimmt, d. h. $1\frac{4}{5} : 1\frac{3}{4}$.

Zusatz. 3. Von der Richtigkeit der Rechnung überzeugt man sich am Sichersten dadurch, daß man die Größe, welche man gefunden hat, als gegeben annimmt und nun die in der Aufgabe liegende Frage so abändert, daß eine der in ihr gegebenen Größen als unbekannt betrachtet wird und berechnet werden soll. Man lasse z. B. den ganzen ersten Theil der zweiten Aufgabe, stelle aber nun die Frage z. B. so: Wie viele Ellen können 28 Personen, welche täglich 8 Stunden arbeiten, in 12 Tagen liefern, wenn die Waare $1\frac{3}{4}$ Ellen breit werden soll. Findet man durch Rechnung die in der zweiten Aufgabe gegebenen 256 Ellen, so ist dieß ein Beweis für die Richtigkeit derselben. Die Auflösung für die letzte Frage stellt sich so her:

$$\begin{array}{rcl} 36 : 28 &=& 300 : u \\ 10 : 12 &=& u : X \\ 9 : 8 &=& u : X \\ 1\frac{3}{4} : 1\frac{4}{5} &=& Y : Z \\ \hline 1 : 128 &=& 2 : Z \end{array}$$

$$Z = 256.$$

Zusatz. 4. Bei zusammengesetzten Aufgaben kommen häufig Verhältnisse vor, die nicht nach aller Schärfe

geometrisch sind. So ist z. B. zwar ganz richtig, daß die Verfertigung eines breiteren Zeuges langsamer vor sich geht als die eines schmäleren; es ist aber wohl nicht anzunehmen, daß man zur Fertigung eines nochmal so breiten Zeuges auch nochmal so viel Zeit gebrauche. Es ist daher das Resultat der Rechnung mehr als eine Annäherung zu betrachten.

Anmerkung. Der Lehrer halte die Schüler an, die Verhältnisse, welche in einer Aufgabe liegen, in der Art, wie in der Auflösung zur zweiten Aufgabe geschehen ist, wörtlich und zwar bei Hausaufgaben schriftlich auseinander zu setzen. Der junge Mensch vergißt, während er Ziffern schreibt, gar leicht, daß er denken soll.

§. 131. Erklärung.

Die Regel, nach welcher aus 5 gegebenen Größen mit Hilfe zweier mit einander verbundener Proportionalsätze eine verlangte Größe abgeleitet wird, nennen die Rechenbücher Regel de quinque. So heißt ferner die Regel, nach welcher aus 7 Größen mit Hilfe dreier unter einander verbundener Proportionalsätze eine gesuchte Größe abgeleitet wird, Regel de septem u. s. w.

Zusatz. 1. Die erste Aufgabe in §. 130 gehört zur Regel de quinque; die zweite zur Regel de novem.

Zusatz. 2. Die in §. 130 aufgelösten Aufgaben und überhaupt alle, welche eine ähnliche Auflösung zulassen, werden, wie auch hier geschehen ist, zweckmäßiger und allgemeiner Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen genannt.

§. 132. Aufgaben.

1) Wie viele Zinsen tragen 7400 Gulden zu 4 Prozent in 7 Monaten?

2) 380 Gulden haben in 2 Monaten 2 Gulden 51 Kr. Zins getragen. Zu wie viel Prozent war dieses Kapital ausgeliehen?

3) 540 Gulden haben in 15 Monaten 27 Gulden Zins getragen. Wie hoch wurde dieses Kapital verzinst?

4) Wenn ein Kapital von 9000 Gulden in 7 Jahren 3150 Gulden Zins getragen hat: wie viele Zinsen trägt ein Kapital von 14000 Gulden in 6 Jahren?

5) Von einem Vorrathe an Lebensmitteln können sich 3580 Mann 5 Monate lang halten, wenn der Mann täglich $2\frac{1}{2}$ Pf. erhält. Wie lange können von diesem Vorrathe 5400 Mann erhalten werden, wenn die tägliche Portion auf $2\frac{1}{4}$ Pf. vermindert wird?

6) 3500 Mann sind auf 8 Monate mit Lebensmitteln versehen, wenn der Mann täglich 3 Pf. erhält. Nun sollen sich aber von diesem Vorrathe 4500 Mann 7 Monate lang halten. Wie viele Pfunde können in diesem Falle dem Manne täglich gereicht werden?

7) 25 Arbeiter liefern in 3 Wochen 245 Stücke einer gewißen Waare. Wie viele Stücke können 36 Arbeiter in 2 Wochen liefern?

8) 18 Personen, welche täglich 10 Stunden arbeiteten, haben 248 Ellen einer gewißen Waare in 12 Tagen geliefert. In wie viel Tagen werden 20 Personen, die täglich 9 Stunden arbeiten, 428 Ellen einer gleichen Waare liefern?

9) 15 Personen, die täglich 9 Stunden arbeiteten, haben in 8 Tagen 256 Ellen einer Waare, welche

$2\frac{1}{4}$ Elle breit war, geliefert. Wie viele Personen sind erforderlich, wenn in 14 Tagen 384 Ellen einer gleichen Waare, jedoch $2\frac{1}{3}$ Ellen breit, geliefert werden sollen?

10) Ein Stück Feld, welches 38 Ruthen (= 10 Fuß) lang und 23 Ruthen breit ist, wurde für 780 Gulden gekauft. Wie viel ist unter den nämlichen Verhältnissen ein Feld werth, das 42 Ruthen lang und 19 Ruthen breit ist?

11) Ein Kanal von 600 Fuß Länge, 4 Fuß Breite und 4 Fuß Tiefe ist von 38 Arbeitern, welche täglich 10 Stunden arbeiteten, in 4 Tagen gezogen worden. Wie lange werden 48 Arbeiter, die täglich 12 Stunden beschäftigt sind, an einem Kanale arbeiten, der 850 Fuß lang, 5 Fuß breit und 3 Fuß tief werden soll?

C) Der Kettensatz.

§. 133. Erklärung.

Es läßt sich sehr häufig das Verhältniß, in welchem zwei Größen z. B. 2 Münzen, 2 Gewichte u. dgl. zu einander stehen, nur mit Hilfe anderer **bekannter** Verhältnisse, welche in Beziehung auf das gesuchte oder Hauptverhältniß **Zwischenverhältnisse** genannt werden, ausmitteln. Wird z. B. die Frage gestellt: in welchem Verhältnisse steht der Sächsische Thaler zum Kronthaler? so darf man sich nur erinnern, daß 5 Sächs. Thaler = 9 Gulden, und 10 Kronthaler = 27 Gulden (§. 126. Zus. 3). Man setze also, um zu dem verlangten Verhältnisse zu gelangen:

1 Sächs. Thaler : 1 Gulden = 9 : 5
1 Gulden : 1 Kronthaler = 10 : 27; folglich
1 Sächs. Thaler : 1 Kronthaler = 90 : 135.
= 2 : 3, oder
3 Sächs. Thaler = 2 Kronthaler.

Die Verhältnisse 1 Sächs. Thaler : 1 Gulden und 1 Gulden : 1 Kronthaler waren die Zwischenverhältnisse, welche zur Ausmittelung des verlangten Verhältnisses benützt worden sind, und diese wurden absichtlich so gebildet, daß sich bei der Multiplikation der unter einander stehenden Glieder in den beiden abgeleiteten Proportionen die Größe Gulden im zweiten Gliede der ersten Proportion gegen die Größe Gulden im ersten Gliede der zweiten Proportion aufhob. (§ 120. Zus. 3).

Wird ferner gefragt: Wie viele Franks gehen auf 100 Kronthaler? so ist vor Allem das Verhältniß des Franks zum Kronthaler auszumitteln. Nun ist aber bekannt, daß 80 Franks = 81 Livres, 24 Livres = 11 Gulden und 27 Gulden = 10 Kronthaler. Man erhält also

1 Frank : 1 Livre = 81 : 80
1 Livre : 1 Gulden = 11 : 24
1 Gulden : 1 Laubthlr. = 10 : 27, also
1 Frank : 1 Laubthlr. = 11 : 64, oder
64 Franks = 11 Laubthlr.

Zur Beantwortung der gestellten Frage gelangt man endlich durch folgende Proportion

Kronthal. Kronthal. Frank Frank
11 : 100 = 64 : X, also
11 X = 6400 und
X = $581\frac{9}{11}$.

Man hat die Proportionen absichtlich wieder so geordnet, daß die Größen Livre und Gulden sich aufheben konnten.

Zusatz. Die Beantwortung der Frage läßt sich leichter und kürzer auf folgende Weise finden:

1) Man bezeichne die gesuchte Anzahl Franks, welche zusammen den Werth von 100 Kronthalern haben sollen, mit X und setze

X = 100 Kronthaler.

Ueberhaupt setze man die gesuchte und mit X bezeichnete Größe zur Linken, und diejenige Größe, welche X gleich seyn soll, zur Rechten des Gleichheitszeichens.

2) Unter diesen ersten Satz schreibe man einen zweiten, dessen erster Theil mit dem zweiten Theile des ersten Satzes gleichartig ist, also im gegebenen Falle Kronthaler enthält. Nach der Aufgabe ist

10 Kronthaler = 27 Gulden.

3) Unter diesen zweiten Satz schreibe man einen dritten, dessen erster Theil mit dem zweiten Theile des zweiten Satzes gleichartig ist, also im gegebenen Falle Gulden enthält.

4) So setze man dieß Verfahren so lange fort, bis man zu einem Satze gelangt, dessen zweiter Theil mit der gesuchten Größe X gleichartig ist, also im gegebenen Falle Franks enthält.

5) Die gleichen Größen, welche auf beiden Seiten vorkommen, heben sich gegen einander auf; auch dividire man je zwei Größen auf der einen und der andern Seite mit ihrem gemeinschaftlichen Maaße, bis alle Glieder auf der einen Seite zu den Gliedern auf der andern Primzahlen sind.

6) Nun multiplizire man alle ersten Theile auf der einen, so wie alle zweiten Theile, welche auf der andern Seite stehen, wie unbenannte Zahlen mit einander, und dividire das Produkt auf der rechten Seite durch die Zahl, welche bei dem X auf der linken Seite bleibt.

Es ist also

X Franks	=	100 Kronthal.
10 Kronthal.	=	27 Gulden
		8
11 Gulden	=	24 Livres
81 Livres	=	80 Franks
3		

$$11\,X = 6400$$

$$X = 581\tfrac{9}{11}.$$

§. 134. Erklärungen.

a) Wenn mehrere Sätze so unter einander gestellt werden, daß das erste Glied des zweiten Satzes mit dem zweiten Gliede des ersten Satzes, das erste Glied des dritten Satzes mit dem zweiten Gliede des zweiten Satzes gleichartig ist u. s. w., so bilden diese Sätze eine sogenannte Kette oder einen Kettensatz. (§. 133. Zus.)

b) Die Regel, nach welcher das Verhältniß zweier Größen mit Hilfe eines Kettensatzes gefunden wird, heißt Kettenregel.

Zusatz. 1. Wenn man die am Ende des vorigen §. gebildete Kette mit den zuerst stehenden Proportionalsätzen vergleicht, so findet man, daß auf der einen Seite eines Satzes der Kette das Produkt aus den

äußeren Gliedern und auf der andern Seite der Kette das Produkt aus den mittleren Gliedern einer Proportion steht. (§. 115.) Die Kettenregel stützt sich auf die Lehre von den Proportionen und geht aus ihr hervor.

Zusatz. 2. Jede Aufgabe, welche sich durch die Kettenregel auflösen läßt, kann auch durch Proportionalsätze gelöst werden, aber nicht umgekehrt.

Anmerkung. Der Kettensatz läßt sich mit Vortheil in allen den Fällen in Anwendung bringen, wo das Verhältniß zweier Größen nur mit Hilfe anderer bekannter Verhältnisse gefunden werden kann. (§. 133.)

§. 103. Aufgaben.

I. Wie viele bayerische Ellen gehen auf 100 Nürnberger Ellen?

Auflösung.

1) Wenn man die Aufgabe durch einen Proportionalsatz auflöst, so erhält man

369,272 : 291,08, = 100 : X (§. 128 N. 15 u. 16)

X = 78,825

2) Nach dem Kettensatze erhält man

X = 100 Nürnb. Ellen

1 = 291,08 Paris. Linien

369,272 = 1 bayerische Elle

X = 78,825

II. Wie viele Pfunde nach dem Kölner Gewichte wiegt ein Kölnischer Kubikfuß Wasser? — Der Kölnische Kubikfuß verhält sich zum Pariser Kubikfuße = 52 : 75. Der Pariser Kubikfuß Wasser wiegt 70,028

Pariser Pfunde, und 21 Paris. Pfunde sind 22 Kölnischen Pfunden gleich.

Auflösung.

1) Wenn man sich der Proportionalsätze bedient, so erhält man

1 Köln. Kub. Fuß : 1 Paris. Kub. Fuß = 52 : 75
1 Paris. Kub. Fuß : 1 Paris. Pfund = 70,028 : 1
1 Paris. Pfund : 1 Köln. Pfund = 22 : 21

1 Köln. Kub. Fuß : 1 Köln. Pfund = 80112,032 : 1575
= 11444,576 : 225

225 Köln. Kub. Fuß = 11444,576 Köln. Pf., also 1 Köln. Kub. Fuß = 50,864... Köln. Pfund, d. h. ein Köln. Kub. Fuß Wasser wiegt 50,864... Köln. Pfund.

2) Nach dem Kettensatze erhält man

X Kölnische Pfunde = 1 Köln. Kub. Fuß Wasser
75 Köln. Kub. Fuß = 52 Paris. Kub. Fuß
1 Paris. Kub. Fuß = 70,028 Paris. Pfund
21 Paris. Pfund = 22 Köln. Pf.

225 X = 11444,576
= 50,864...

III. Ein Kaufmann hat 5 Zentner einer Waare, zu 100 Pfund gerechnet, um 160 Gulden gekauft. Um wie viele Kreuzer muß er jedes Pfund verkaufen, wenn er 12 Prozent an der Waare gewinnen will?

Auflösung.

1) Wenn man mit Proportionalsätzen rechnet, so erhält man

1 Pfund : 1 Zentner = 1 : 100
1 Zentner : 1 Guld. Ausgabe = 160 : 5
1 Guld. Ausg.*) : 1 Guld. Einn. = 112 : 100
1 Gulden : 1 Kreuzer = 60 : 1

---

1 Pfund : 1 Kreuzer = 10752 : 500
500 Pfund = 10752 Kreuzer
1 Pfund = $21\frac{1}{2}$ Kreuzer.

2) Nach dem Kettensatze erhält man

X Kreuzer = 1 Pfund
100 Pfund = 1 Zentner
5 Zentner = 160 Gulden
100 Guld. Ausl. = 112 Guld. Einnahme
1 Gulden = 60 Kreuzern

---

500 X = 10752
Y = $21\frac{1}{2}$.

*) Man darf nicht annehmen, daß ein Gulden Ausgabe zu einem Gulden Einnahme im Verhältnisse der Gleichheit stehe. (§. 107. b.) Der Kaufmann kann, wenn er für einen Gulden seiner Auslage beim Einkaufe nur einen Gulden beim Verkaufe einnimmt, nicht bestehen, weil er sonst ohne allen Gewinn sein Geschäft betriebe. Soll also der Kaufmann bei einem Geschäfte gewinnen, so muß er bei seinem Einkaufe für jeden Gulden mehr Waare erhalten, als er beim Verkaufe für jeden Gulden abgiebt; d. h. der Kaufmann muß jeden Gulden seiner Ausgabe höher anschlagen als einen Gulden der Einnahme. Es steht also, wenn ein Gewinn gemacht worden ist, ein Gulden der Ausgabe zu einem Gulden der Einnahme in abnehmendem Verhältnisse. Wenn daher gesagt wird, ein Kaufmann gewinnt 12 Prozent, so nimmt er für jedes hundert Gulden seiner Auslage beim Einkaufe 112 Gulden beim Verkaufe ein. Es verhält sich also 1 Gulden Auslage : 1 Gulden Einnahme = 112 :100.

Zusatz. Von der Richtigkeit der Rechnung kann man sich auf eine gleiche Weise wie §. 130. Zus. 3. überzeugen.

§. 136. Aufgaben.

1) Wie viele Berliner Fuß gehen auf 1000 Wiener Fuß *)?

2) Wie viele Rheinländische Fuß gehen auf 500 Paris. Fuß?

3) Wie viele französische Meter gehen auf eine bayerische Chaussée-Meile?

4) Zu einem Kleide gebraucht man $10\frac{1}{2}$ Ansbacher Ellen. Wie viele bayerische Ellen werden also dazu erfordert?

5) Wie viele Rubel gehen auf 1000 Friedrichsd'or, wenn 13 Rubel 24 Gulden gleich sind?

6) Eine gewisse Waare, welche $33\frac{5}{6}$ Ellen (aune) hält, wird in Straßburg für 328 Franks gekauft. Wie hoch kommt, abgesehen von allen Transportkosten, die Elle in Bayern zu stehen? NB. 80 Franks = 81 Livres (ältere franz. Münze); 24 Livres = 11 Guld.

7) Ein Kaufmann gewinnt an einem Stücke Tuch, das 98 Ellen hielt und ihm auf 388 Gulden zu stehen kam, 18 Prozent. Wie theuer hat er jede Elle verkauft?

8) Ein Kaufmann kauft 500 Pfund einer Waare für 140 Gulden. Da die Waare keinen Absatz findet, so entschließt er sich, das Pfund für 16 Kreuzer zu verkaufen. Wie viel Prozent leidet er Verlust?

---

*) Man sehe die Tabellen am Ende des Buchs.

9) Ein Münchner Kaufmann läßt sich ein Stück Tuch kommen, welches 55 Brabanter Ellen hielt, wofür 430 holländische Gulden angesetzt waren. Da überdieß die Transportkosten 6 Prozent betragen, so ist die Frage, wie die bayerische Elle zu stehen kommt? NB. Der holländische Gulden hat 20 Stüber, und 104 Stüber = einem holländischen Dukaten = 5 Gulden 36 Kr.

10) Es läßt sich ein Frankfurter Kaufmann 400 Ellen (aune) Tuch aus Frankreich kommen und bezahlt dafür 4320 Franks; die weiteren Unkosten belaufen sich auf 4 Prozent. Wie theuer muß der Kaufmann die Elle in Frankfurt verkaufen, wenn er 15 Prozent gewinnen will?

D. Gesellschaftsrechnung.

§. 137. Erklärung.

Wenn eine gewisse Größe, z. B. eine Summe Geldes in zwei oder mehrere Theile nach einem bestimmten Verhältnisse getheilt werden soll, so heißt die Regel, nach welcher die Theilung vorzunehmen ist, die Gesellschaftsregel. Es wird z. B. folgende Aufgabe gegeben: Zwei Personen legten zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte 5600 Gulden zusammen, und zwar A 3400 Gulden und B 2200 Gulden. Nach beendigtem Geschäfte ergab sich ein Gewinn von 816 Gulden. Wie viel erhält jeder von diesem Gewinne? Hätten die beiden Personen A und B eine gleichgroße Summe zur Betreibung des Geschäfts

eingelegt, so würden beide, unter übrigens gleichen Umständen, einen gleichen Antheil am Gewinne zu verlangen haben. Da aber A mehr eingelegt hat als B, also auch im unglücklichen Falle mehr hätte verlieren können als B, so ist es der Billigkeit gemäß, daß A einen größeren Theil des Gewinns erhalte als B, und daß diese Theile im Verhältnisse der Einlagssummen stehen. Man theile also die Zahl 816 nach dem Verhältnisse der Zahlen 3400 und 2200. Verfährt man nach §. 122, so ist

$$5600 : 816 = 3400 : X$$
$$= 2200 : Y;$$

also X = 495 Gulden 25 Kr. 3 Pf.; Y = 320 Gulden 34 Kr. 1 Pf.

Zusatz. Die Gesellschaftsrechnung stützt sich ganz auf §. §. 121 und 122.

§. 138. Aufgaben.

1) Drei Personen legen zur gemeinschaftlichen Betreibung eines Geschäfts 25800 Gulden zusammen, und zwar A 10600 Gulden, B 9500 Gulden, und C das Uebrige. Sie gewinnen zusammen 2360 Gulden. Wie viel erhält jede Person von diesem Gewinne?

2) Vier Personen kauften gemeinschaftlich ein Landgut für 50800 Gulden, und zwar erlegt A 16500, B 14300, C 10800 und D 9200 Gulden. Nach einiger Zeit verkaufen sie dieses Gut für 62300 Gulden. Wie haben sie sich in den Gewinn zu theilen?

3) Vier Personen kaufen gemeinschaftlich für 11530 Gulden Hopfen ein. A giebt zum Geschäfte 4650, B 2800, C 2500 und D 1580 Gulden. Da nun

aber der Hopfen im Preise fällt, so erleiden sie einen Verlust von 954 Gulden. Wie viel hat jede Person an diesem Verluste zu tragen?

4) Eine Erbschaft von 20000 Gulden soll unter 5 Personen so vertheilt werden, daß sich die Theile wie die Zahlen 3, 4, 5, 7, 11 verhalten. Wie viel erhält jede Person?

§. 139. Erklärungen.

a) Der Gewinn oder Verlust, welcher bei Betreibung eines gemeinschaftlichen Geschäfts auf eine Person trifft, hängt, wenn die Einlagen der Unternehmer gleichlang für den nämlichen Zweck benützt worden sind, von dem Verhältnisse ab, in welchem die Einlagen zu einander stehen (§. 137). Ist aber die Zeit der Benützung der Einlagen verschieden, so kann der treffende Gewinn oder Verlust nicht mehr von dem Verhältnisse der Einlagen allein abhängen. Wenn z. B. Jemand ein Geschäft mit 100 Gulden ein Monat lang treibt, nach Verlauf dieses Monats eine zweite Person gleichfalls mit 100 Gulden dem Geschäfte beitritt und am Ende des zweiten Monats ein Gewinn gemacht worden ist, so wird die erste Person, welche ihr Kapital nochmal so lange als die zweite stehen hatte, auch einen doppelten Antheil am Gewinn in Anspruch nehmen. Es richtet sich also bei gleichen Einlagen der Gewinn nach dem Verhältnisse der Zeiten der Benützung derselben.

Wenn nun aber eine Person mit 200 Gulden ein Geschäft angefangen hätte, nach Verlauf eines Monats eine zweite Person mit 100 Gulden dem Geschäfte bei-

getreten und nach Verlauf des zweiten Monats irgend ein Gewinn gemacht worden wäre, so hätte die erste Person nicht nur wegen der doppelten Einlage einen doppelten Antheil am gemachten Gewinne zu fordern, sondern auf einen doppelten Antheil wegen der nochmal so lange im Geschäfte verwendeten Summe. Es wird also die erste Person viermal so viel vom gemachten Gewinne erhalten als die zweite.

Wenn daher die Einlagen und die Zeiten der Benützung derselben verschieden sind, so stehen die Antheile am Gewinne im zusammengesetzten Verhältnisse der Einlagen und der Zeiten ihrer Benützung (§. 129); d. h. sie verhalten sich wie die Produkte aus den Einlagen in die Zeiten.

b) Die Regel, nach welcher die Antheile am Gewinne bei verschiedenen Einlagen und Zeiten ausgemittelt werden, heißt die zusammengesetzte Gesellschaftsregel.

§. 140. Aufgabe.

Eine Person verwendet 4500 Gulden zu einem Handelsgeschäfte. Nach drei Monaten tritt dem Geschäfte eine zweite Person mit einem Kapitale von 2800 Gulden bei. Sie gewinnen nach weiteren 4 Monaten 966 Gulden. Wie viel erhält jeder vom Gewinne?

Auflösung.

1) Das Kapital der ersten Person ist für das Geschäft 7 Monate, das der zweiten Person nur 4 Monate verwendet worden. Es verhalten sich also die Antheile am Gewinne = 4500 . 7 : 2800 . 4.

2) 42700 : 966 = 31500 : X
= 11200 : Y

3) A erhält also 712 Guld. 37 Kr. 2 Pf. (beinahe)
B » » 253 » 22 » 2 »
966 Gulden.

Zusatz. Auf eine ähnliche Weise werden alle Aufgaben dieser Art aufgelöst.

§. 141. Erklärungen.

a) Wenn mehrere Stoffe nach einem bestimmten Verhältnisse zu einem verlangten Ganzen verbunden werden sollen, so ist zu berechnen, wie viel man von jedem einzelnen Stoffe zur Mischung zu nehmen hat.

b) Die Regel, nach welcher diese Ausrechnung vorgenommen wird, heißt Vermischungsregel.

Zusatz. Die Vermischungsregel ist in ihrer Anwendung von der Gesellschaftsregel nicht unterschieden, und stützt sich wie sie auf §. §. 121 u. 122.

§. 142. Aufgabe.

Um gutes Schießpulver zu bereiten, nimmt man auf 16 Theile Salpeter 3 Theile Kohle und 2 Theile Schwefel. Wie viele Pfunde von jedem dieser 3 Stoffe muß man nehmen, wenn 20 Zentner Schießpulver bereitet werden sollen?

Auflösung.

1) Die Mischungstheile sollen im Verhältnisse der Zahlen 16, 3, 2 stehen; die ganze Mischung = 2000 Pfunde.

2) Es ist also

$$
\begin{aligned}
21 : 2000 &= 16 : X;\ X = 1523\tfrac{17}{21} \\
&= 3 : Y \quad Y = 285\tfrac{15}{21} \\
&= 2 : Z \quad Z = 190\tfrac{10}{21}
\end{aligned}
$$

Mischung = 2000 Pfund.

§. 143. Aufgaben.

1) Das stärkste Schießpulver erhält man (nach F. Hildebrandt) aus 76 Prozent Salpeter, 15 Prozent Kohle und 9 Prozent Schwefel. Wie viele Pfunde muß man von jedem dieser drei Stoffe nehmen, wenn 4 Zentner Schießpulver bereitet werden sollen?

2) Bronze besteht gewöhnlich aus 100 Theilen Kupfer und 36 Theilen Zinn. Wie viele Pfunde Kupfer und Zinn muß man nehmen, um 100 Pfund Bronze zu bereiten?

3) Zu Kanonenmetall rechnet man gewöhnlich auf 100 Theile Kupfer 9 Theile Zinn und 6 Theile Messing. Wie viele Pfunde Kupfer, Zinn und Messing sind erforderlich, wenn die Mischung 50 Zentner schwer seyn soll?

4) Das Spiegelmetall, aus welchem die Stahlspiegel bereitet werden, besteht aus 32 Theilen Kupfer, 16 Theilen Zinn, 1 Theile Arsenik und 1 Theile Silber. Wie viele Pfunde muß man von jedem dieser Stoffe nehmen, wenn die Mischung 1000 Pf. wiegen soll?

Tabellen

für Maaße, Gewichte und Münzen.

I. Längenmaaße.

a) Nach dem Dezimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Skrupel
1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

b) Nach dem Duodezimalmaaße.

Fuß	Zoll	Linien	Skrupel
1	12	144	1728
	1	12	144
		1	12

Die bayerische Elle hält 2 Fuß und $10\frac{1}{4}$ bayerische Duodezimalzolle.

Die Klafter hält 6 bayerische Fuß.

Die geometrische Ruthe hält 10 bayerische Fuß.

Die französische Toise hält 6 Pariser Fuß.

II. Flächenmaaße.

a) Nach dem Dezimalmaaße.

Quadratfuß	Quadratzoll	Quadratlinie	Quadratskrupel
1	100	10000	1000000
	1	100	10000
		1	100

b) Nach dem Duodezimalmaaße.

Quadratfuß	Quadratzoll	Quadratlinien	Quadratskrupel
1	144	20736	2985984
	1	144	20736
		1	144

Das bayerische Tagwerk oder Juchart hält 40000 Quadratfuß.

III. Körpermaaße.

a) Nach dem Dezimalmaaße.

Kubikfuß	Kubikzoll	Kubiklinien	Kubikskrupel
1	1000	1000000	1000000000
	1	1000	1000000
		1	1000

b) Nach dem Duodezimalmaaße.

Kubikfuß	Kubikzoll	Kubiklinien	Kubikskrupel
1	1728	2985984	5159780352
	1	1728	2985984
		1	1728

Die bayerische Maaßkanne hält 43 bayerische Dezimalkubikzolle.

Ein Ohm hat 2 Eimer, der Eimer 60 Maaß.

Ein bayerischer Schäffel hält 6 Metzen oder 208 bayerische Maaß.

Eine bayerische Holzklafter hält 6 Fuß in der Höhe und 6 Fuß in der Breite. Die Scheiterlänge ist gesetzlich 3½ Fuß, so daß also die Klafter 126 Kubikfuß hält.

IV. Gewichtmaaße.

a) Eintheilung des Handelsgewichts.

Zntr.	Pfunde	Unzen	Loth	Quint	Pfenniggew.	Gran
1	100	1600	3200	12800	51200	768000
		16	32	128	512	7680
			2	8	32	480
			1	4	16	240
				1	4	60
					1	15

b) Eintheilung des deutschen Apothekergewichts.

Pfund ℔	Unze ℥	Drachme ʒ	Skrupel ℈	Gran gr.
1	12	96	288	5760
	1	8	24	480
		1	3	60
			1	20

c) Eintheilung der kölnischen Mark oder des Münzgewichtes.

Mark	Loth	Quint	Pfenniggew.	Richtpf.
1	16	64	256	65536
	1	4	16	4096
		1	4	1024
			1	256

Eine Mark Gold wird in 24 Karate oder 288 Gran getheilt. Eine Mark Silber wird in 16 Lothe oder 288 Gran getheilt. Gold, welches keinen Zusatz von geringerem Metalle enthält, heißt fein Gold. Eben so heißt Silber, welches keinen Zusatz von einem geringeren Metalle enthält, fein Silber. Eine Mark von feinem Gold oder Silber heißt eine feine Mark.

Gold heißt 18karatig, wenn die Mark 18 Theile fein Gold und 6 Theile Beisatz enthält, u. s. w. Silber heißt 13löthig, wenn die Mark 13 Theile fein Silber und 3 Theile geringeres Metall enthält u. s. w.

d) Eintheilung des holländischen Troysgewichts.

Mark	Unzen	Engel	Asse
1	8	160	5120
	1	20	640
		1	32

Nach dem holländischen Troysgewichte werden gewöhnlich die Gewichte der verschiedenen Länder unter einander verglichen.

e) Eintheilung des ehemaligen französischen Handelsgewichts.

Pfund Livre	Unzen Onces	Quint Gros	Skrupel Deniers	Gran Grains
1	16	128	384	9216
	1	8	24	576
		1	3	72
			1	24

V. Eintheilung des Papiermaaßes.

Ballen	Riß	Buch	Bogen Schreibpap.	Bogen Druckpapier
1	10	200	4800	5000
	1	20	480	500
		1	24	25

VI. Bestimmung des Fußes und der Elle einiger Länder und Städte nach dem Pariserfuße zu 144 Duodezimallinien.

Namen der Länder und Städte.	Ein Fuß hat Pariser Linien	Eine Elle hat Pariser Linien
Ansbach, altes Maaß	132,92	276,78
Augsburg, altes Maaß	131,29	260,0
Bayern	129,38	369,27
Berlin und ganz Preussen	139,13	295,65
Bremen	128,2	256,4
Frankfurt a. M.	126,16	242,6
Frankreich, alter Pariser Fuß	144	Aune 531,95
Mètre, neues franz. Maaß	443,296	531,95
Großbritannien, Foot	135,114	Imperial yard 405,34
Hamburg	127	254, brabanter Elle 306,49
Nürnberg, altes Maaß	134,7	291
Oesterreich	140,126	345,41
Rheinländischer Fuß	139,129	
Sachsen	125,3	251,136

VII. Bestimmung der Meile einiger Länder nach der geographischen oder deutschen Meile zu 22803,29 Pariser Fuß.

Namen der Länder	Die Meile hält Pariser Fuß	Auf einen Meridiangr. gehen
Bayerische Chausséemeile	22826,6	14,98..
Geographische Meile nach den neuen franz. Messungen	22803,29	15

Namen der Länder	Die Meile hält Pariser Fuß	Auf einen Meridiangr. gehen
Französ. Lieue	13681,97	25
» Seemeile	17102,47	20
Großbritannien	4963,23	68,9..
» Seemeile	5717,13	59,83
Italienische	5717,13	59,83
Oesterreichische Postmeile	23355	14,64..
Preussische	23873,76	14,32..
Russische Werste	3288,2	104,02..
Sächsische	27912	12,25..
Schwedische	32953,5	10,37..
Spanische	12882	26,55
Türkische	5144,94	66,48..
Ungarische	25734,35	13,29..

VIII. Bestimmung der Gewichte verschiedener Länder nach holländischen Assen Troysgewichts.

Namen der Städte und Länder	Namen des Gewichts	Hält an holländ. Assen
Amsterdam	Pfund	10280
Bayern	»	11655,168
Bremen	»	10365
Deutsches Apothekergewicht	»	7443,9
Frankfurt a. M.	Handelspfd.	10516,9
	Krämerpfd.	9737,9
Frankreich	1 Pfd. Poids de Marc (altes Maaß)	10188

Namen der Städte und Länder.	Namen des Gewichts	Hält an holländ. Assen
Frankreich	Gramme (neues Maaß)	20,8128
Großbritannien	Pfund Troygewicht	7767,37
	Pfund Avoir du poids	9439,52
Hamburg	Pfund (der Zentner = 112 Pfund)	10080,92
	Krämerpf.	9734,3
Köln	Mark	4864
Leipzig	Pfund	9728,9
Nürnberg (altes Maaß)	»	10621,2
Oesterreich	»	11655
Preussen	»	9734,38
Rußland	Funt 90 Zolotnik	8512,31
Würtemberg	Pfund	9734,38

IX. Bestimmung der Münzen verschiedener Länder nach ihrem Gehalte in holländischen Assen Troysgewicht. *)

Namen der Länder und Münzen	Metall	Feingehalt in holländischen Assen	Zahl der Stücke auf eine Mark fein	Werth im 24 Gulden Fuß		
				Guld.	Kr.	Pf.
Deutschland						
Konventions- oder bayerische Thaler	Silb.	486,4	10	2	24	

*) Die Gold- und Silbermünzen bestehen nicht aus lauter Gold oder Silber, sondern es ist ihnen ein geringeres Metall, gewöhnlich Kupfer, beigemischt. Das Gewicht einer Münze nennt man ihr Schrot. Die Anzahl der Stücke, welche an Werth eine feine Mark Gold oder Silber ausmachen, bestimmt den Gehalt oder das Korn der Münze. Die gesetzliche Bestimmung des Schrotes und Kornes einer Münze heißt der Münzfuß.

Nach dem 24 Gulden Fuß gehen 16 Reichsthaler oder 10 Konventionsthaler auf eine Mark fein Silber.

Nach dem Konventions- oder 20 Gulden Fuß gehen 20 Gulden auf eine Mark fein Silber. Nach diesem Münzfuße werden in Oesterreich, Bayern, Sachsen, Würtemberg, Baden u. s. w. die Silbermünzen geprägt. Sie kursiren jedoch, mit Ausnahme von Oesterreich und Sachsen, nach dem 24 Gulden Fuße, so daß der Konventionsthaler 2 Gulden 24 Kr., und ein Stück, welches die Aufschrift 20 Kr. hat, in Bayern, Würtemberg u. s. w. 24 Kr. gilt.

Eine Münze heißt reell, wenn sie wirklich geprägt ist z. B. Kronthaler. Eine Münze heißt fingirt oder eine Rechnungsmünze, wenn sie nicht geprägt ist, z. B. ein Pfund Sterling.

Namen der Länder und Münzen	Metall	Feingehalt in holländischen Assen	Zahl der Stücke auf eine Mark fein	Werth im 24 Gulden Fuß		
				Guld.	Kr.	Pf.
Sächsischer Thlr. zu 24 guten Gr. ein guter Gr. = 12 Pf. (20 Guldenfuß)	Silb.	364,8	$13\frac{1}{3}$	1	48	
Sächsischer Kurantgulden zu 16 g. Gr.	»	243,2	20	1	12	
Thaler des 24 Guldenfußes	fingirt			1	30	
Guld. = 60 Kr.	»			1	—	
Badensche Gulden	Silb.	198,5	24,5	—	58	3
Brabanter oder Kronthaler	Silb.	535,4	9,0847	2	38	2 *)
Preussische Thlr. zu 30 Silbergroschen, ein Silbergr. = 12 Pfennige	»	347,4	14	1	42	$3\frac{1}{2}$ **)
Thaler Hamburger Banko zu 3 Mark Banko	fingirt			2	36	2
Dukaten, gesetzlich	Gold	71,5	68,027	5	36	

*) Die Kronthaler kursiren zu 2 fl. 42 kr.

**) Der Preussische Thaler wird in der Regel zu 1 fl. 45 Kr. gerechnet.

Namen der Länder und Münzen	Metall	Feingehalt in holländischen Assen	Zahl der Stücke auf eine Mark fein	Werth im 24 Gulden Fuß		
				Guld.	Kr.	Pf.
Preussische Friedrichsd'or	Gold	125,136	38,77	9	48	
Frankreich.						
Frank = 100 Centimes	Silb.	93,654	51,931	—	27	3
Fünffranken-Stück	»	468,27	10,386	2	18	
Zwanzigfranken-Stück	Gold	119,88	40,575	9	22	2
Großbritannien.						
Schilling = 12 Pences	Silb.	108,86	44,68	—	32	1
Pfund Sterling = 20 Schilling	fingirt			10	45	
Guinee	Gold	159	30,7	12	24	
Italien.						
Lira italiana ist der franz. Frank						
Lira austriaca	Silb.	81	60	—	24	
Scudo austriaco	»	486	10,0	2	24	
Zecchino	Gold	71,3	67,16	5	36	
Nordamerikanische Freistaaten.						
Dollar = 100 Cents	Silb.	500,4	9,72	2	28	

Namen der Länder und Münzen	Metall	Feingehalt in holländischen Assen	Zahl der Stücke auf eine Mark fein	Werth im 24 Gulden-Fuß		
				Guld.	Kr.	Pf.
Rußland.						
Silberrubel = 100 Kopeken	Silb.	374	13	1	50	3
Ein Papierrubel gilt ohngefähr 40 Kr.						
Dukaten	Gold	71,4	68,09	5	35	2
Spanien.						
Piaster (peso duro) = 20 Realen	Silb.	502,7	9,674	2	28	3
Wechseldukate	fingirt			2	34	2
Pistole	Gold	140,9	39,926	9	32	2
Türkei.						
Piaster = 40 Para, der Werth ändert sich häufig	Silb.	126,6	38,4	—	37	2
1 Beutel 500 Piaster						
1 Goldbeutel (Kitze) = 30000 Piaster						

X. Angabe der neufranzösischen Maaße, Gewichte und Münzen.

A. Längenmaaße.

Nach den neuesten Messungen der Franzosen hält der vierte Theil eines Erdmeridians, welcher durch Frankreich geht, 30784440 Pariser Fuß. Der zehnmillionte Theil dieser Länge wurde von der französischen Nation als Hauptlängenmaaß angenommen und hat die Benennung Mètre (Meter) erhalten. Ueberhaupt ist der Meter als die Grundeinheit für das neufranzösische Maaß-, Gewichts- und Münzsystem zu betrachten.

Der Meter wird nach den Gesetzen des Dezimalsystems eingetheilt.

Es ist also

der Mètre = 3,078444 Par. Fuß = 443,2959 P. Lin.
der Decimètre = 0,1 Mètre = 44,32959 Par. Lin.
der Centimètre = 0,01 Mètre = 4,432959 P. Lin.
der Millimètre = 0,001 Mètre = 0,4432959 P. Lin.

Ueber sich hat der Mètre folgende Einheiten:

der Decamètre = 10 Mètres = 30,78444 Par. Fuß
der Hectomètre = 100 Mètres = 307,8444 P. Fuß
der Kilomètre = 1000 Mètres = 3078,444 P. Fuß
der Myriamètre = 10000 Mètres = 30784,44 P. F. *)

Zusatz. Eine gleiche Eintheilung findet bei den andern Gattungen der Maaße statt, so daß nämlich durch das vorgesetzte Wort deci ein Zehntel, durch das

---

*) Nach diesen Angaben läßt sich das altfranzösische Längenmaaß in Meters u. s. w. verwandeln.

vorgesetzte Wort centi ein Hundertel einer Haupteinheit angezeigt wird. So wird also ferner durch das vorgesetzte deca das Zehnfache, durch das vorgesetzte hecto das hundertfache u. s. w. einer Haupteinheit angezeigt.

B. Flächenmaaße.

Die Einheit, welche zur Messung der Flächen dient, ist das Quadrat, welches einen Meter zur Seite hat, und heißt Mètre carré. Es ist also

Ein Mètre carré = 9,47681746 Paris. Quadratfuß.

Die Einheit zur Bestimmung des Flächeninhalts der Felder ist ein Quadrat, welches den decamètre zur Seite hat und Are heißt. Es ist also

Ein Are = 100 Mètres carré = 947,68.. P.Quadratf.

C. Körperliche Maaße.

Die Einheit der körperlichen Maaße ist ein Würfel, welcher den Decimètre zur Seite hat und Litre heißt. Es ist ein Litre = 50,412416 Paris. Kubikzolle. Die höheren und niedrigeren Einheiten werden wie bei dem Meter bestimmt.

Der Kubikmeter oder Kilolitre = 1000 Litres = 29,173852 Paris. Kubikfuß ist das Maaß für das Brennholz und heißt Stère.

D. Gewichtmaaße.

Die Einheit der Gewichtmaaße heißt Gramme und ist dem absoluten Gewichte eines Kubik-Centimètre destillirten Wassers bei der Temperatur des zergehenden Eises in luftleerem Raume gleich. Ein Gramm ist = 18,828 Gran nach altem Maaße.

E. Münze.

Die Einheit der Münze ist der Frank. Er hat den Werth von 5 Grammen Silber, welches 9 Theile reines Silber und einen Theil Zusatz enthält. Es sind 80 Franks = 81 Livres (alte Münze).

Die Unterabtheilungen des Franks sind die Kupfermünzen Decimes und Centimes.

Ein Decime = 0,1 Frank.

Ein Centime = 0,01 Frank.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen erhellt, daß die neufranzösischen Maaße sich sämmtlich auf den Meter beziehen, also in genauer Verbindung unter einander stehen; und hierin liegt ein besonderer Vorzug des neuen Maaß- und Münzsystems der Franzosen.

Ig. Ma

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Friederich, Johann Bernhard,

Lehrbuch der Arithmetik für die lateinischen Schulen in Bayern

Nürnberg 1831

Math.p. 156 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081812-0